UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Espacios vectoriales

Ejercicio 1 *Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales:*

a) $A = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + t = b\}$ *con* $b \in \mathbb{R}$,*de* $\mathbb{R}^4$.

b) $B = \{(x, y) : xy = 0\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

c) $C = \{(x, y, z, t) : x = \alpha, y = \alpha, z = 2\alpha, t = 5\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

d) $D = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, y - z = 0\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

e) $E = \{(x, y) : x^2 = b \; ; \; b \in \mathbb{R}^+\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

f) $F = \{(x, y) : x \geq y\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2 *Calcula una base de cada uno de los subespacios vectoriales obtenidos en el ejercicio anterior.*

Ejercicio 3 *Determina el valor de* a *y* b *para que el vector* $(1, 0, a, b)$ *pertenezca al subespacio generado por los vectores* $(1, 4, -5, 2)$ *y* $(1, 2, 3, -1)$.

Ejercicio 4 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n*. De las siguientes afirmaciones, demuestra las que sean ciertas y da un contraejemplo para las falsas.*

1. *Todo sistema de* $n + 1$ *vectores siempre genera a* V.
2. *Un sistema de* m *vectores con* $m < n$ *es siempre un sistema libre.*
3. *Un sistema linealmente independiente con* n *vectores es generador de* V.
4. *Un sistema generador de* V *con* n *vectores es un sistema linealmente independiente.*
5. *Ningún sistema que contenga al vector nulo es linealmente independiente.*
6. *Todo sistema que no contenga al vector nulo es linealmente independiente.*

Ejercicio 5 *Halla una base de cada uno de los siguientes subespacios:*

a) $\langle (1, 2, -1), (3, -1, 0), (4, 1, 1) \rangle$ *de* $\mathbb{R}^3$.

b) $\langle (1, 0, 2), (-2, 1, 1), (0, 1, 5) \rangle$ *de* $\mathbb{R}^3$.

c) $\langle (1, 2, 3, 4, 5), (0, -1, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0, -1), (-4, -3, -2, -1, 0) \rangle$ *de* $\mathbb{R}^5$.

Ejercicio 6 *Comprobad si los siguientes conjuntos de vectores son L.I., generadores y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso su rango y la dimension del subespacio vectorial que generan, y sus ecuaciones (implícitas y paramétricas)*

i) $\{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

ii) $\{(1,-1,0),(1,1,0)\}$ *de* $W = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

iii) $\{(2,0,0),(3,2,0),(4,3,x)\}$ *($x \in \mathbb{R}$ fijo) de* $\mathbb{R}^3$.

iv) $\{(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\}$ *($a \in \mathbb{R}$ fija) de* $\mathbb{R}^3$.

v) $\{(1,2,3,0),(4,3,4,-16),(7,3,4,5)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

vi) $\{(1,0,0,-1),(2,1,1,-2),(0,1,1,0),(1,1,1,-1)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

vii) $\{(4,-5,7),(3,3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

viii) $\{(1,2,3,1),(2,3,2,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 7 *Dadas las siguientes afirmaciones, demuestra las que sean ciertas y da un ejemplo para las falsas:*

a) *Si* $\{x,y,z\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces es L.I. el conjunto*

a.1) $\{x,y\}$,

a.2) $\{x-y, x+y, y+z\}$,

a.3) $\{x-z, x+y, z-x\}$,

a.4) $\{x,y,v\}$ / $v = ax+by+cz$ *con* $c \neq 0$.

b) *Si* u,v,w *son vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial,*

b.1) *¿Puede asegurarse que* u *y* v *son linealmente dependientes?*

b.2) *¿Puede asegurarse que* u *depende de los otros dos?*

b.3) *¿Puede asegurarse que uno de los tres depende de los otros dos?*

c) *Si* $\{u,v,w\}$ *es una base, ¿es posible que* $u+v+w=0$*?*

d) *Si son linealmente independientes los conjuntos de vectores* $\{x,y\}$, $\{y,z\}$ *y* $\{x,z\}$ *entonces, ¿debe ser el conjunto* $\{x,y,z\}$ *linealmente independiente?*

e) *Si* $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ *es un sistema generador del espacio vectorial* V*, entonces ¿debe ser* $\dim V \leq 4$*?*

f) *Si* $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ *es un conjunto libre del espacio vectorial* V*, entonces ¿debe ser* $\dim V \leq 4$*?*

g) *Sean* V_1 *y* V_2 *subespacios vectoriales de* V *. Si* $\dim V_1 = \dim V_2$*, entonces ¿tiene que cumplirse forzosamente que* $V_1 = V_2$*?. Y si* $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2)$*, ¿tiene que cumplirse forzosamente que* $V_1 = V_2$*? ¿Es cierta la siguiente propiedad* $\{V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = V_1\}$*?*

Ejercicio 8 *Halla una base del espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$ *que contenga al vector* $(1,2,1,1)$ *y otra base que contenga a los vectores* $(1,1,0,2)$ *y* $(1,-1,2,0)$.

Ejercicio 9 *Hallar una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^4$*:*

a) $V_1 = \langle(1,2,0,1)\rangle$.

b) $V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$.

c) $V_3 = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = \gamma \\ t = \mu \end{cases}$. *d)* $V_4 = \begin{cases} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{cases}$.

Ejercicio 10 *Sea* $S = \langle(1,2,1,-1),(1,3,a,-1),(-1,a,-3,1)\rangle$ *siendo a un número tal que* $(1,-1,4,-1) \notin S$ *Y sea* $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = b\ ,\ y = c - 1\}$ *con b y c tales que T es un subespacio vectorial. Obtén las ecuaciones, una base y la dimensión del subespacio S y del subespacio T. Calcular una base y la dimensión de los subespacios* $S + T$ *y* $S \cap T$.

Ejercicio 11 *Sea* $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+t = 0,\ x+2y-z+t = 0,\ x-y+z+t = 0,\ x+y+2z-at = 0\}$. *Calcula el valor de a para que T sea un subespacio de dimensión uno. Sea* $S = \langle(1,2,1,3),(2,5,3,1),(1,-1,-2,2)\rangle$. *Da una base y la dimensión de los subespacios:* S , T , $S+T$ *y* $S \cap T$.

Ejercicio 12 *Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *los sistemas* $C = \{e_1, e_2\}$ *y* $B = \{u_1, u_2)\}$ *donde* $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $u_1 = (1,1)$ *y* $u_2 = (1,-1)$. *Comprueba que son bases de* $\mathbb{R}^2$. *Utilizando la ecuación matricial correspondiente cuando sea necesario, da las coordenadas de los vectores* u_1, u_2 , $v = 2u_1 - u_2$ *y* $w = 2e_1 - e_2$ *en la base C y en la base B.*

Ejercicio 13 *Halla las matrices cambio de base* $M_{BB'}$ *y* $M_{B'B}$ *en* $\mathbb{R}^3$, *y utilizando la ecuación matricial de cambio de base, obtén las coordenadas del vector* $v = (2,-1,1)_B$ *en la base* B' *en cada uno de los siguientes casos:*

a) $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ *y* $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

b) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *y* $B' = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

c) $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ *y* $B' = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

Nota: *El apartado c) se debe de deducir directamente de los apartados a) y b) sin necesidad de hacer ninguna inversa ni resolver ningún sistema de ecuaciones.*

Ejercicio 14 *Sea* $B = \{(-1,0,1),(0,1,-1),(4,-2,-1)\}$. *Comprueba que es base de* $\mathbb{R}^3$. *Halla la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B y obtén las coordenadas en la base B del vector cuyas coordenadas en la base canónica son (-1,1,2).*

Ejercicio 15 *Consideremos los espacios* $S = \langle(1,2,-1,3),(2,5,1,-1),(5,12,1,1)\rangle$ *y* $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + 2z + t = 0;, 2x + 4y + z + t = 0, ; x - y + 5z + 2t = 0\}$. *Calcular una base y la dimensión de los subespacios* S , T , $S \cap T$ *y* $S + T$.

Ejercicio 16 *Sea* $S = \langle (1,2,-1,1),(1,3,-1,a),(-1,-1,a,-1)\rangle$ *siendo* a *un número tal que* $(1,-1,-1,2) \in S$ *y sea* $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+t = b \ , \ y^2 = c\}$ *con* b *y* c *tales que* T *es un subespacio vectorial. Obtén las ecuaciones , una base y la dimensión del subespacio* S *y del subespacio* T*. Calcula una base y la dimensión de los subespacios:* $S+T$ *y* $S \cap T$.

Ejercicio 17 *Hallar un conjunto generador de* $U \cap V$*, si* U *y* V *están dados por*

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{array} \right. \quad V \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + \mu + \partial \\ y = \mu + \partial \\ z = \lambda + \partial \\ t = \mu + \partial \end{array} \right.$$

Ejercicio 18 *Calcular la base* B *si sabemos que*

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $B' = \{(1,2,3),(-3,1,1),(1,0,1)\}$.

Ejercicio 19 *Calcular la base* B' *si sabemos que*

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $B = \{(1,2,3),(-3,1,1),(1,0,1)\}$.