UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ejercicios de Fundamentos Matemáticos.

Aplicaciones lineales y diagonalización

Ejercicio 1. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z)$. Hallar $\ker f$, $\operatorname{im} f$ y $f(V)$, donde $V = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\}$.

Ejercicio 2. Supongamos que tenemos una base $B = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que tenemos un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $f(u) = 5u + 2v$ y $f(v) = 3u - v$. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B.

Ejercicio 3. Se considera el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que hace corresponder a los vectores $(1,0,1), (0,1,1)$ y $(1,1,0)$ los vectores $(0,1), (0,2)$ y $(1,1)$ respectivamente. Hallar la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (z+y, -x+y-z, z)$. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$ $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ hallar $M_C(f), M_B(f), M_{BC}(f)$ y $M_{CB}(f)$.

Ejercicio 5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B' = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

Ejercicio 6. Se consideran tres espacios vectoriales A, B y C con bases respectivas $a = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2\}$ y $c = \{c_1, c_2, c_3\}$. Supongamos que tenemos homomorfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dados por las condiciones $f(a_1) = b_1 - b_2$, $f(a_2) = b_2$ y $f(a_3) = 2b_2$; $g(b_1) = c_1 - c_2 + 2c_3$ y $g(b_2) = c_1 - c_2$. Se pide:

i) Matriz asociada a f respecto de las bases a y b.

ii) Matriz asociada a g respecto de las bases b y c.

iii) Matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases a y c.

Ejercicio 7. Ver si es posible que existan aplicaciones lineales como se indica a continuación (justificando la respuesta):

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(1,0) = (2,-1,3)$, $f(0,1) = (3,5,8)$ y $f(1,1) = (3,0,-1)$.

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $g(1,8) = (6,4)$, $g(2,7) = (0,-1)$ y $g(-1,1) = (6,5)$.

Ejercicio 8. Sea f es un endomorfismo. Estúdiese cuales son sus valores propios, si es diagonalizable y en caso afirmativo, búsquese la matriz diagonal y la de paso cuando la matriz asociada en base canónica sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Siendo f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 2\alpha+4 & 0 & 2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha-1 \\ -2 & -\alpha-3 & \alpha & -\alpha+1 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 2\alpha+1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, busca los valores de α para los que f es diagonalizable. Calcula, en esos casos, una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de f sea diagonal.

Ejercicio 10. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determina según el valor del parámetro a cuando diagonaliza la matriz y para dichos valores da las matrices diagonal y de paso.
2. Calcula la potencia n-ésima de A, es decir A^n para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Calcula una expresión de las potencias de A^n de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12. Estudia los valores de c para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Da la matriz diagonal a la que A es semejante y la matriz de paso para el caso $c = 0$. Calcula también A^n.

Ejercicio 13. Estudia para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$