Tema 13: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

1 Derivadas direccionales, derivadas parciales

El concepto que generaliza en varias variables la derivabilidad en funciones reales de una variable real es el de diferenciabilidad. Ahora bien, para funciones de varias variables la derivabilidad no ha lugar, al menos en el mismo sentido que lo tratábamos para funciones de una variable. Es por ello por lo que se hace necesario el estudio de la diferenciabilidad, a pesar de ser un concepto más complejo. Comenzaremos antes analizando algunas nociones más sencillas que van relacionadas.

Definición 1.1 *Partimos de lo siguiente:*

una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	*un punto* $x_0=(a_1,...,a_n)\in Dom f$	$v=(v_1,...,v_n)$ *un vector no nulo de* $\mathbb{R}^n$

*Llamaremos **derivada direccional** de f en x_0 en la dirección del vector v (en algunos sitios lo llaman derivada con respecto a v) a*

$$D_vf(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+tv_1,...,a_n+tv_n)-f(a_1,...,a_n)}{t}$$

Observación 1.2 ***(Importante)*** *La derivada direccional anterior puede realizarse de modo equivalente cogiendo la función*

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	*definida por* $g(t)=f(x_0+tv)$	*calculando* $g'(0)$

En general, es más sencillo realizarlo de este modo.

Observación 1.3 *Salvo que se diga expresamente lo contrario, si hablamos de la existencia de alguna derivada direccional se supone implícitamente que su valor es finito (aunque hay casos en los que puede dar infinito).*

Ejemplo 1.4 *Hallemos la derivada direccional*

de la función $f(x,y)=x^2-y^2$	*en el punto* $x_0=(3,2)$	*en la dirección del vector* $v=(1,-1)$

Ésta vale

$$\begin{aligned}D_vf(x_0) &= D_{(1,-1)}f(3,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(3,2)+t(1,-1)]-f(3,2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3+t,2-t)-5}{t}=\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(3+t)^2-(2-t)^2-5}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{10t}{t}=\lim_{t\to 0}10=10\end{aligned}$$

Haciéndolo de la otra manera tendríamos que definir

$$g(t)=f(x_0+tv)=f(3+t,2-t)=(3+t)^2-(2-t)^2=5+10t$$

y hallar $g'(0)$.

Como $g'(t)=10$ concluimos que $D_{(1,-1)}f(3,2)=g'(0)=10$

Ejemplo 1.5 *Hallemos la derivada direccional*

de la función $f(x,y)=\frac{x-y}{e^x+y^2}$	*en el punto* $x_0=(0,1)$	*en la dirección de vector* $v=(-1,2)$

Resultaría así:

$$D_vf(x_0)=D_{(-1,2)}f(0,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(0,1)+t(-1,2)]-f(0,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-t,1+2t)+\frac{1}{2}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t-(1+2t)}{e^{-t}+(1+2t)^2}+\frac{1}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-3t-1}{e^{-t}+(1+2t)^2}+\frac{1}{2}}{t}\underbrace{=}^{aplicamos\ l'H\hat{o}pital}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-3[e^{-t}+(1+2t)^2]+(-3t-1)[-e^{-t}+4(1+2t)]}{[e^{-t}+(1+2t)^2]^2}}{1}=-\frac{9}{4}$$

Y si nos hubiesen pedido la derivada direccional en la dirección del vector $(-1,2)$ se podría haber obtenido desde el principio cambiando (v_1,v_2) por $(-1,2)$, pero es mejor, aprovechando los cálculos realizados, en la expresión anteriormente calculada realizar la sustitución $(v_1,v_2)=(-1,2)$. De este modo $D_{(-1,2)}f(0,1)=-\frac{1}{4}$.

Ejemplo 1.6 *Hallemos la derivada direccional*

de la función $f(x,y)=\sin(2x-3y)$	en el punto $x_0=(0,0)$	en la dirección de vector $v=(v_1,v_2)$

Procedemos así:

$$D_vf(x_0)=D_{(v_1,v_2)}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(0,0)+t(v_1,v_2)]-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2tv_1-3tv_2)}{t}\underbrace{=}^{aplicamos\ l'H\hat{o}pital}\lim_{t\to 0}\frac{(2v_1-3v_2)\cos(2tv_1-3tv_2)}{1}=2v_1-3v_2$$

Y si nos pidiesen ahora la derivada direccional en la dirección del vector $(4,-5)$ se puede obtener, como el cálculo que acabamos de hacer, desde el principio cambiando (v_1,v_2) por $(4,-5)$, pero es mejor, aprovechando los cálculos realizados, en la expresión anteriormente calculada realizar la sustitución $(v_1,v_2)=(4,-5)$. De este modo

$$D_{(4,-5)}f(0,0)=2\cdot 4-3\cdot(-5)=8+15=23$$

Ejemplo 1.7 *Hallemos la derivada direccional*

de la función $f(x,y)=x+2yz^2-e^z$	en el punto $x_0=(-1,1,0)$	en la dirección de vector $v=(-2,2,1)$

Ésta vale

$$D_{(-2,2,1)}f(-1,1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(-1,1,0)+t(-2,2,1)]-f(-1,1,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-1-2t,1+2t,t)-(-2)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-1-2t+2(1+2t)t^2-e^t+2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2t+2t^2+4t^3-e^t}{t}=$$

$$\underbrace{=}^{aplicamos\ l'H\hat{o}pital}\lim_{t\to 0}\frac{-2+4t+12t^2-e^t}{1}=-2-1=-3$$

De la otra manera tendríamos que definir

$$g(t)=f(x_0+tv)=f(-1-2t,1+2t,t)=-1-2t+2(1+2t)t^2-e^t$$

y hallar $g'(0)$.

$$\textit{Como } g'(t)=-2+4t+12t^2-e^t \textit{ concluimos que } D_{(-2,2,1)}f(-1,1,0)=g'(0)=-3$$

Ejemplo 1.8 *Calcular la derivada direccional de la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

en el origen en la dirección del vector $(3,-5)$. Ésta vale

$$D_vf(x_0)=D_{(3,-5)}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(0,0)+t(3,-5)]-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(3t,-5t)-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-5t(3t)^2}{(3t)^2+(-5t)^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-45t^3}{34t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-45t}{34}}{t}=\lim_{t\to 0}-\frac{45}{34}=-\frac{45}{34}$$

En este caso no utilizamos la función auxiliar g ya que no se podría obtener su derivada por el modo usiual. Esto se debe a que la función f está definida en el origen $(0,0)$ de un modo aparte y diferente que en los demás puntos.

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$x_0=(a_1,...,a_n)\in Domf$	y $C=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$

Cojamos (recordemos que cada e_i tiene todas las coordenadas nulas salvo la i-ésima que vale 1). Entonces para cada $i=1,2,...,n$ la derivada direccional respecto del vector e_i es

$$\begin{aligned} D_{e_i}f(x_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f[(a_1,....,a_n)+t(0,0,...,0,1,0,...,0)]-f(a_1,...,a_n)}{t}= \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,...,a_i+t,...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{t}\end{aligned}$$

y la llamaremos **derivada parcial** i-ésima de f ó (suponiendo que designamos por x_i a la variable i-ésima del espacio) **derivada parcial de f con respecto a** x_i en el punto x_0. Para designar a esta derivada parcial suelen utilizarse las siguientes **notaciones:**

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$	$D_if(x_0)$	$f_{x_i}(x_0)$	$f'_{x_i}(x_0)$

Por ejemplo, para una función f de dos variables (x,y) las derivadas parciales en el punto x_0 podrían denotarse así

$\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\}$	$\{D_1f(x_0),D_2f(x_0)\}$	$\{f_x(x_0),f_y(x_0)\}$	$\{f'_x(x_0),f'_y(x_0)\}$

Y para una función f de tres variables (x,y,z) las derivadas parciales en el punto x_0 podrían denotarse así:

$\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\}$	$\{D_1f(x_0),D_2f(x_0),D_3f(x_0)\}$	$\{f_x(x_0),f_y(x_0),f_z(x_0)\}$	$\{f'_x(x_0),f'_y(x_0),f'_z(x_0)\}$

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales son derivadas direccionales, en principio se pueden hallar aquéllas igual éstas, por el límite de la definición o utilizando la función

$g(t)=f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_{n-1},a_n)$	pues $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,...,a_n)=g'(0)$

Ejemplo 1.9 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+1}$	*en el punto* $x_0=(-2,3)$

Éstas son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,3)=D_{(1,0)}f(-2,3)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(-2,3)+t(1,0)]-f(-2,3)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-2+t,3)-(-\frac{5}{5})}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-2+t-3}{(-2+t)^2+1}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t-5}{t^2-4t+5}+\frac{t^2-4t+5}{t^2-4t+5}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2-3t}{t^2-4t+5}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-3t}{t(t^2-4t+5)}=\lim_{t\to 0}\frac{t-3}{t^2-4t+5}=-\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,3)=D_{(0,1)}f(-2,3)=\lim_{t\to 0}\frac{f[(-2,3)+t(0,1)]-f(-2,3)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-2,3+t)+1}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-2-(3+t)}{(-2)^2+1}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-5-t}{5}+\frac{5}{5}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t}{5}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5}$$

Utilizando el otro modo procederíamos con la derivada con respecto a x así: definiendo

$$g_1(t)=f[x_0+t(1,0)]=f[(-2,3)+t(1,0)]=f(-2+t,3)=\frac{-2+t-3}{(-2+t)^2+1}=\frac{t-5}{t^2-4t+5}$$

y hallando $g_1'(0)$. Como

$$g_1'(t)=\frac{1\cdot(t^2-4t+5)-(t-5)\cdot(2t-4)}{(t^2-4t+5)^2}$$

concluimos que $$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,3)=D_{(1,0)}f(-2,3)=g_1'(0)=\frac{5-20}{25}=\frac{-15}{25}=-\frac{3}{5}$$

y con la derivada con respecto a y así: definiendo

$$g_2(t) = f[x_0 + t(0,1)] = f[(-2,3) + t(0,1)] = f(-2, 3+t) = \frac{-2-(3+t)}{(-2)^2+1} = \frac{-t-5}{5}$$

y hallando $g_2'(0)$.

$$\textit{Como} \quad g_2'(t) = -\frac{1}{5} \qquad \textit{concluimos que} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2,3) = D_{(0,1)}f(-2,3) = g'(0) = -\frac{1}{5}$$

Habitualmente, calcular las derivadas parciales es más sencillo del siguiente modo:

La derivada parcial de f con respecto a la variable x_i en el punto $x_0 = (a_1, ..., a_n)$ puede hallarse calculando la derivada de la función de una variable

$$F_i(x_i) = f(x_1, ..., x_n),$$

en la que dejamos fijas las variables distintas de x_i, en el punto x_0 (o, de modo equivalente, tomando la función de una variable

$$G_i(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n),$$

en la que hemos sustituido las variables x_j, para $j \neq i$, por los correspondientes a_j, y derivando en el punto a_i).

Ejemplo 1.10 *Hallemos las derivadas parciales de la función*

$f(x,y) = \frac{2x-y}{x+3}$	*en el punto* $x_0 = (-1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x+3) - 1(2x-y)}{(x+3)^2} = \frac{6+y}{(x+3)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x+3) - 0(2x-y)}{(x+3)^2} = \frac{-x-3}{(x+3)^2} = -\frac{1}{x+3}$$

por tanto	$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -\frac{1}{2}$

Otra forma de hallar estas derivadas parciales sería la siguiente:

Si utilizamos la función

$$g(x) = f(x,0) = \frac{2x}{x+3} \qquad \textit{se obtendría que} \qquad g'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\textit{y por tanto que} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = g'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\textit{A partir de la función} \qquad h(y) = f(-1,y) = \frac{2-y}{2} \qquad \textit{se tiene que} \qquad h'(y) = -\frac{1}{2}$$

$$\textit{y entonces} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = h'(0) = -\frac{1}{2}$$

Nota: *Por supuesto que también pueden calcularse estas derivadas parciales como derivadas direccionales, de los dos modos comentados hasta el momento.*

Ejemplo 1.11 *Hallemos las derivadas parciales de la función*

$f(x,y,z) = e^{2x+3y}\cos z$	*en cualquier punto* (x,y,z)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}\cos z$	$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}\cos z$	$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{2x+3y}\sin z)$

Ejemplo 1.12 *Las derivadas parciales de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y,z) = \frac{2x - y + 1}{3x + 4y - 5z}$$

son

$$\begin{aligned} f_x = \frac{2 \cdot (3x + 4y - 5z) - (2x - y + 1) \cdot 3}{(3x + 4y - 5z)^2} &= \frac{9y - 10z - 3}{(3x + 4y - 5z)^2} \\ f_y &= \frac{-15x + 5z - 4}{(3x + 4y - 5z)^2} \\ f_z &= \frac{10x - 5y + 5}{(3x + 4y - 5z)^2} \end{aligned}$$

Observación 1.13 *Lo realizado en los 2 ejemplos anteriores se ha podido hacer (al igual que ocurría con las derivadas de funciones de una variable) porque no hay ningún problema a la hora de derivar directamente. Si lo hay habrá que utilizar la definición de derivada parcial, como hicimos en algunos ejemplos anteriores como el Ejemplo 1.9 y como ocurre en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 1.14 *Calculemos las derivadas parciales en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la función dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy2x}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

En el origen $(0, 0)$ estos cálculos no son válidos, por lo que debemos recurrir a la definición de derivada parcial como derivada direccional, y se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f[(0,0) + t(1,0)] - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f[(0,0) + t(0,1)] - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observación 1.15 *No hay una relación directa entre las derivadas parciales y la continuidad de una función en un punto. Hay casos en los que no existe alguna de las derivadas parciales y la función es continua y hay casos en los que la función no es continua pero sí tiene derivadas parciales. Así ocurre en el ejemplo anterior (lo cual puede comprobarse realizando el cambio a polares). Por supuesto también hay casos en los que ambas cosas ocurren, es decir, casos en los que la función es continua y existen las derivadas parciales, y también casos en los que ninguna de estas cosas ocurre.*

Para una función vectorial

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pueden definirse de modo similar sus derivadas direccionales y parciales, siendo éstas vectores de $\mathbb{R}^m$ y pudiendo hallarse coordenada a coordenada a partir de las funciones coordenadas $f_1, f_2, ..., f_n$.

Ejemplo 1.16 *Las derivadas parciales de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x,y)=(x-y,x^2e^y,\cos xy) \qquad \textit{son}$$

$$\boxed{f_x=(1,2xe^y,-y\sin xy)}\ \boxed{f_y=(-1,x^2e^y,-x\sin xy)}$$

Ejemplo 1.17 *Calcular la derivada direccional de la función*

$$\boxed{f(x,y)=(x^2-2y+e^{y-x},\sin x+3)}\ \boxed{\textit{en el punto } x_0=(0,-2)}\ \boxed{\textit{en la dirección de } v=(2,1)}$$

Ésta vale

$$D_vf(x_0)=D_{(2,1)}f(0,-2)=\lim_{t\to0}\frac{f[(0,-2)+t(2,1)]-f(0,-2)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(2t,t-2)-(4+e^{-2},3)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(4t^2-2[t-2]+e^{-t-2},\sin 2t+3)-(4+e^{-2},3)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(4t^2-2t+e^{-t-2}-e^{-2},\sin 2t)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{4t^2-2t+e^{-t-2}-e^{-2}}{t},\frac{\sin 2t}{t}\right)\overbrace{=}^{\textit{aplicar l'Hôpital en ambas coordenadas}}\lim_{t\to0}\left(\frac{8t-2e^{-t-2}}{1},\frac{2\cos 2t}{1}\right)=(-2e^{-2},2)$$

2 Plano tangente a una superficie

Recordemos que la derivada de una función derivable

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

en un punto x_0 podía ser interpretada como la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $x=x_0$. Veamos qué interpretación geométrica podemos darle a las derivadas parciales. Supongamos que tenemos una función real de dos variables f y que tomamos la superficie determinada por la ecuación $z=f(x,y)$. Haciendo uso de las derivadas parciales de f es posible obtener el **plano tangente** a la superficie en un punto (a,b), también se dice a veces en el punto $(a,b,f(a,b))$, cuya ecuación es

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$$

Ejemplo 2.1 *Hallemos el plano tangente de la superficie*

$$\boxed{z=3x^2-y\sin x}\ \boxed{\textit{en el punto } (\pi,0)}$$

En este punto la coordenada z vale $3\pi^2$ y como la función que define la superficie es

$$f(x,y)=3x^2-y\sin x \qquad \textit{tenemos que}$$

$$\boxed{\tfrac{\partial f}{\partial x}=6x-y\cos x}\ \boxed{\tfrac{\partial f}{\partial y}=-\sin xz}$$

Así la ecuación de nuestro plano tangente es

$$z=3\pi^2+6\pi\cdot(x-\pi)+0\cdot(y-0) \qquad \textit{es decir} \qquad z=3\pi^2+6\pi\cdot(x-\pi)$$

Ejemplo 2.2 *Hallemos el plano tangente de la superficie*

$$\boxed{z=(x^2-y^2)e^{xy+y}}\ \boxed{\textit{en el punto } (0,-2)}$$

En este punto la coordenada z vale $-\frac{4}{e^2}$ y como la función que define la superficie es

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{xy+y} \qquad \textit{tenemos que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{xy+y} + y(x^2 - y^2)e^{xy+y} = (2x + yx^2 - y^3)e^{xy+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{xy+y} + (x+1)(x^2 - y^2)e^{xy+y} = (-2y + x^3 - xy^2 + x^2 - y^2)e^{xy+y}$$

Así la ecuación de nuestro plano tangente es

$$z = -\frac{4}{e^2} + \frac{8}{e^2} \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y + 2) \qquad \textit{es decir} \qquad z = -\frac{4}{e^2} + \frac{8}{e^2}x$$

Ejemplo 2.3 *Hallemos el plano tangente de la superficie*

$z = \sinh(4x^2 - y^2)$	*en el punto* $(1,2)$

En este punto la coordenada z vale $\sinh(0) = 0$ *y como la función que define la superficie es*

$$f(x,y) = \sinh(4x^2 - y^2) \qquad \textit{tenemos que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x\cosh(4x^2 - y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = --2y\cosh(4x^2 - y^2)$$

Así la ecuación de nuestro plano tangente es

$$z = 0 + 8\cosh 0 \cdot (x - 1) - 4\cosh 0 \cdot (y + 1) \qquad \textit{es decir} \qquad z = 8(x - 1) - 4(y + 1)$$

3 Derivadas parciales de orden superior

Para una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

también puede plantearse la existencia de **derivadas parciales segundas**, siendo éstas las derivadas parciales de las derivadas parciales. Denotaremos por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{o abreviadamente} \qquad f_{x_i x_j}$$

a la derivada parcial segunda de f con respecto (primero) de x_i y (después) de x_j. Si $i = j$ pondremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

De modo análogo se extiende el concepto para derivadas parciales terceras o de otro orden. También en el caso de las derivadas terceras, cuartas, etc. pueden utilizarse abreviaturas del tipo

$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}$

cuando se deriva más de una vez con respecto de alguna variable.

Por ejemplo, para una función de dos variables las derivadas parciales segundas serían

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

y las terceras

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y \partial x}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial x}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^3}$

Si f es una función para la que existen todas las derivadas parciales de orden k y son continuas en un abierto Ω diremos que es de clase $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ o simplemente **de clase C^k en Ω** (diremos que f es **de clase** C^∞ cuando existan las derivadas parciales de todo orden y sean continuas, y de clase C^0 cuando la función sea continua). De hecho, las funciones usuales y las operaciones que habitualmente realizamos con ellas son funciones de clase C^∞ en todo punto del interior del dominio. Por ejemplo, así ocurre con la función

$$f(x, y) = x^2 e^{y+x} - \sin[\log(\frac{y}{x})]$$

en todo punto en que $x \neq 0$ e $\frac{y}{x} > 0$.

Surge ahora la cuestión de si se cumplirá **la igualdad de las derivadas cruzadas**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Esto no es cierto siempre. Pero **basta con que la función sea de clase** C^2 para poder asegurar esto.

Ejemplo 3.1 *Para la función*

$$f(x, y) = x e^{x+2y}$$

hallemos las derivadas de primer, segundo y tercer orden. Las de primer orden son

$f_x = e^{x+2y} + xe^{x+2y} = (1 + x)e^{x+2y}$	$f_y = 2xe^{x+2y}$

las de segundo orden son

$f_{xx} = e^{x+2y} + (1 + x)e^{x+2y} = (2 + x)e^{x+2y}$	$f_{xy} = f_{yx} = 2(1 + x)e^{x+2y}$	$f_{yy} = 4xe^{x+2y}$

y las de tercer orden son

$f_{xxx} = (3 + x)e^{x+2y}$	$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 2(2 + x)e^{x+2y}$	$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 4(1 + x)e^{x+2y}$	$f_{yyy} = 8xe^{x+2y}$

Nota: *Observemos que hemos utilizado que f es C^∞ para justificar las igualdades*

$$f_{xy} = f_{yx}, f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Ejemplo 3.2 *Para la función*

$$f(x, y, z) = xy\cos(2x - 3z) - \sin(y^2 + x^2)$$

hallemos las derivadas de primer y segundo orden. Las de primer orden son

$f_x = y\cos(2x - 3z) - 2xy\sin(2x - 3z) - 2x\cos(y^2 + x^2)$

$f_y = x\cos(2x - 3z) - 2y\cos(y^2 + x^2)$	$f_z = 3xy\sin(2x - 3z)$

Las de segundo orden son

$f_{xx} = -4y\sin(2x - 3z) - 4xy\cos(2x - 3y) - 2\cos(y^2 + x^2) + 4x^2\sin(y^2 + x^2)$

$f_{xy} = f_{yx} = \cos(2x - 3z) - 2x\sin(2x - 3z) + 4xy\sin(y^2 + x^2)$	$f_{xz} = f_{zx} = 3y\sin(2x - 3z) + 6xy\cos(2x - 3z)$

$f_{yy} = -2\cos(y^2 + x^2) + 4y^2\sin(y^2 + x^2)$	$f_{yz} = f_{zy} = 3x\sin(2x - 3z)$	$f_{zz} = -9xy\cos(2x - 3z)$

4 Diferenciabilidad

En el Tema 6 vimos el concepto de derivabilidad para funciones reales de una variable. Para funciones de varias variables no tiene sentido dicho concepto, por lo que se hace necesario plantear otro que, en el caso de funciones de una variable, coincida con éste. Dicho concepto la diferenciabilidad. Diremos que una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es **diferenciable** en x_0 cuando existe una aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

de modo que

$$\lim_{(x_1,...,x_n)\to(0,...,0)} \frac{f[(a_1,...,a_n)+(x_1,...,x_n)] - f(a_1,...,a_n) - T(x_1,...,x_n)}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}} = 0$$

(o abreviadamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0+x) - f(x_0) - T(x)}{\|x\|} = 0$$

poniendo $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Cuando esto ocurre la aplicación lineal T que cumple esa propiedad se denomina **la diferencial de f en el punto x_0** y usaremos la notación

$$T = df(x_0) \qquad \text{ó} \qquad Df(x_0)$$

De modo análogo se define el concepto de diferenciabilidad de una función vectorial

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dividiendo por $\|x\| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ en cada coordenada, y ocurriría que la diferencial sería una aplicación lineal

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

y el límite anterior debería ser el vector $0 \in \mathbb{R}^m$.

El problema de estudiar la diferenciabilidad para funciones vectoriales se reduce al de funciones reales ($m = 1$) debido al siguiente resultado:

Propiedad: Una función

$$f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en un punto x_0 si y sólo si $f_1, ..., f_m$ (**las funciones coordenadas** de f) **son diferenciables** en x_0. En esta situación se tiene además que

$$df(x_0) = (df_1(x_0), ..., df_m(x_0))$$

es decir, la diferencial se calcula coordenada a coordenada. Además, como veremos más adelante, esto podrá simplificarse gracias a lo que llamaremos matriz jacobiana.

A continuación ponemos algunas propiedades de la diferencial:

1. **La diferencial** de una función diferenciable en un punto **es única**.

2. Toda función **diferenciable** en un punto **es continua** en ese punto (por lo que toda función que no sea continua no es diferenciable).

3. **(Teorema de la función compuesta o Regla de la cadena)** Si

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ es una función diferenciable en } x_0 \text{ y}$$

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \text{ es diferenciable en } f(x_0)$$

entonces la función compuesta $g \circ f$ es diferenciable en x_0. Además

$$d(g \circ f)(x_0) = dg[f(x_0)] \circ df(x_0)$$

Nota: Más adelante veremos cómo determinar en la práctica la diferencial de la función compuesta, especialmente con la matriz jacobiana.

4. Las **funciones usuales** (constantes, polinomios, exponenciales, logaritmos, trigonométricas, etc.), así como las que son combinación de ellas mediante las operaciones básicas (suma, resta, producto, cociente, composición, etc.) resultan diferenciables en todos los puntos posibles (en los puntos del interior del dominio).

A continuación vemos la relación que hay entre la diferenciabilidad de una función y la existencia de derivadas direccionales (en particular de derivadas parciales):

Propiedad: Si una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en un punto x_0 entonces existe la derivada direccional $D_v f(x_0)$ con valor finito para cualquier vector no nulo $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En particular **existen las derivadas parciales de f en x_0 con valor finito**. Además, **en esta situación se tiene que**

$$(*) \qquad D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i$$

En particular para cada vector e_i de la base canónica $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Observación 4.1 *Veamos aquí la fórmula anterior (*) para el caso de 2 variables:*

$$D_{(v_1,v_2)} f(a,b) = df(a,b)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot v_2$$

Y para 3 variables:

$$D_{(v_1,v_2,v_3)} f(a,b,c) = df(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \cdot v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \cdot v_3$$

Ejemplo 4.2 *Hallemos la diferencial de la función*

$$f(x,y) = x^2 e^{xy}$$

en el punto $(-1,0)$.

En primer lugar tenemos que

$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + x^2 y)e^{xy}$	$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{xy}$

luego

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = -2$	$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -1$

Entonces $\quad df(-1,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

es una aplicación lineal tal que para cada vector $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$df(-1,0)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) \cdot v_2 = -2v_1 - v_2$$

Ejemplo 4.3 *Hallemos la diferencial de la función*

$$f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$$

en el punto $(-1,2)$.

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 3e^5} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -4e^5}$

Entonces $\quad df(-1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

es una aplicación lineal tal que para cada vector $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *se tiene que*

$$df(-1,2)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) \cdot v_2 = 3e^5 v_1 - 4e^5 v_2$$

Ejemplo 4.4 *Para la función*

$$f(x,y) = x^3 \sin(y+2x)$$

calcular

$$df(1,-2)(0,\frac{\pi}{4})$$

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\sin(y+2x) + 2x^3\cos(y+2x)} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x^3\cos(y+2x)}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 2} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 1}$

Entonces $\quad df(1,-2)(0,\frac{\pi}{4}) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Ejemplo 4.5 *Para la función*

$$f(x,y) = xy + e^{x-y}\sin x$$

calcular

$$df(a,b)(0,3)$$

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = y + e^{x-y}\sin x + e^{x-y}\cos x} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{x-y}\sin x}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b + e^{a-b}\sin a + e^{a-b}\cos a} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a - e^{a-b}\sin a}$

Entonces $\quad df(a,b)(0,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot 3 = 3a - 3e^{a-b}\sin a$

Ejemplo 4.6 *Para la función*

$$f(x,y) = \frac{3x}{y^2+1}$$

calcular

$$df(a,b)(v_1,v_2)$$

En primer lugar tenemos que $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{y^2+1}} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-6xy}{(y^2+1)^2}}$

luego $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{3}{b^2+1}} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{-6ab}{(b^2+1)^2}}$

Entonces $\quad df(a,b)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot v_2 = \frac{3v_1}{b^2+1} - \frac{6abv_2}{(b^2+1)^2}$

Ejemplo 4.7 *Sea*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una función diferenciable en el punto $(2,-1)$ *y tal que*

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 3$	$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -2$

Hallar la expresión analítica de la diferencial

$$df(2,-1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Calcular también

$$Df_{(4,5)}(2,-1)$$

Lo primero que se pide es $\quad df(2,-1)(v_1,v_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)\cdot v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)\cdot v_2 = 3v_1 - 2v_2$

Y lo segundo es $\quad Df_{(4,5)}(2,-1) = df(2,-1)(4,5) = 3\cdot 4 - 2\cdot 5 = 2$

Ejemplo 4.8 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en un punto* x_0 *y tal que para cada vector no nulo* $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ *se cumple que*

$$Df_v(x_0) = 5v_1$$

Hallar las derivadas parciales de f *en dicho punto.*

Procediendo como en el ejercicio anterior se tiene que

$$5v_1 = Df_{(v_1,v_2)}(x_0) = df(x_0)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\cdot v_2$$

De aquí deducimos ahora que

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 5$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0$

Si bien toda función diferenciable posee derivadas parciales, hay funciones que poseen derivadas parciales y sin embargo no son diferenciables, incluso hay casos en los que la función no es ni siquiera continua, como ocurre con la función del Ejemplo **??** en el $(0,0)$.

Corolario 4.9 *Si alguna de las derivadas parciales o direccionales no existe (o tiene valor infinito) entonces la función no es diferenciable.*

Como vemos hay funciones que poseen derivadas parciales en un punto y sin embargo no son diferenciables en dicho punto. La cosa cambia si exigimos la continuidad de las derivadas parciales. Veamos el siguiente criterio:

Propiedad: Supongamos que tenemos **una función** f **que es de clase** C^1 (es decir, con derivadas parciales de orden 1 continuas) en x_0. Entonces f **es diferenciable** en x_0.

Observación 4.10 *Este resultado nos servirá sobre todo de modo teórico para saber que las funciones usuales son diferenciables, sin tener que calcular las derivadas parciales (si lo que pretendemos es calcular primero las derivadas parciales para después comprobar la continuidad de éstas, normalmente no es el método más aconsejable).*

El recíproco de este resultado no es cierto, pues hay funciones que son diferenciables en un punto y que tienen derivadas parciales que no son continuas en dicho punto (ver Ejemplo **??**).

Veamos a continuación la última herramienta que vamos a utilizar para **determinar si una función**

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es o no diferenciable en un punto $x_0 = (a_1, ..., a_n)$:

Si **todas las derivadas parciales de f en x_0 existen con valor finito** entonces sabemos que **de ser diferenciable** f en el punto x_0 ocurriría que para cualquier vector $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tendría que la diferencial de f en x_0 sería la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot x_n$$

Entonces **debería cumplirse que el siguiente límite existe y es nulo**

$$\lim_{(x_1,...,x_n)\to(0,...,0)} \frac{f(a_1 + x_1, ..., a_n + x_n) - f(a_1, ..., a_n) - T(x_1, ..., x_n)}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}}$$

En caso de ser esto cierto tendríamos que f es una función diferenciable en el punto x_0 y que efectivamente $df(x_0) = T$; en caso de no existir tal límite o de existir y no valer cero, f no sería diferenciable en el punto x_0.

Ejemplo 4.11 *Estudiemos la continuidad y la diferenciabilidad en el punto* $(0,0)$ *de las funciones definidas, si* $(x, y) \neq (0, 0)$*, por*

$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$	$g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$	$h(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$

$$f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$$

En caso de ser diferenciables hallaremos la diferencial en $(0,0)$*.*

Es sencillo ver que, en el origen (realizando el cambio a coordenadas polares) la primera no es continua (luego no es diferenciable) y las otras dos sí son continuas. Ahora bien la segunda función no es diferenciable en el punto, pues si bien sus derivadas parciales (en el punto) existen y valen

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$	$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$

respectivamente. Y el límite que planteamos para la diferencial

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - [\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - [1 \cdot x + 0 \cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \textit{ no existe}$$

(como puede fácilmente verse en polares o al hallar los límites direccionales). Finalmente la tercera función sí es diferenciable (en el punto), pues sus derivadas parciales (en el punto) son nulas y el límite planteado para la diferencial

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2} - [\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2} - [0 \cdot x + 0 \cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2} - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \textit{ existe y es nulo}$$

(puede verse en coordenadas polares), luego

$$dh(0,0)(v_1, v_2) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 0$$

es decir, la diferencial es la función constante igual a 0*.*

En resumen **para estudiar la diferenciabilidad lo que debemos hacer** por regla general **es:**

1) Si **a simple vista se ve que f es de un tipo concreto** (polinómica, exponencial, trigonométrica, etc. o combinación de éstas), eso significará que la función es **de clase C^1** (es decir tiene derivadas parciales de primer orden continuas) luego **será diferenciable**.

2) Si ya hemos analizado o si se puede ver puede determinar fácilmente que **la función no es continua**, en ese caso **no será diferenciable** (si no hemos determinado aún la no continuidad de la función, este criterio no es aconsejable con carácter general, pues a veces es más costosa esta labor que realizar el análisis de los criterios que vienen a continuación).

3) Si **no existe (con valor finito) alguna de las derivadas parciales** (de primer orden) de f en x_0 sabemos ya que f **no es diferenciable** en x_0.

4) **En caso de que existan todas las derivadas parciales de primer orden (con valor finito) construir la función** T candidata a ser la diferencial y comprobar si cumple o no que el límite correspondiente sea nulo. En caso afirmativo la función será diferenciable y en caso negativo no.

5 Matriz jacobiana

Sea f una función diferenciable en un punto x_0. Como ocurre con toda aplicación lineal podemos calcular la matriz asociada a la diferencial $df(x_0)$ respecto de diversas bases. Concretamente nos interesamos por la matriz asociada respecto de las bases canónicas:

Propiedad:

$$\text{Si} \qquad f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es una función diferenciable en un punto x_0 entonces

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es una aplicación lineal y tendría una matriz asociada respecto de las bases canónicas **de** $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Esta matriz se llamará **matriz jacobiana de** f **en** x_0 (ya la mostramos a continuación) y la denotaremos por

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Observación 5.1 *En algunos contextos puede utilizarse la notación* $J\frac{(f1,f2,...,fm)}{(x1,x2,...,xn)}$ *para la matriz jacobiana anterior, así queda claro cuáles son las funciones que se derivan y cuáles son las variables respecto de las que se deriva.*

Mediante la matriz jacobiana podemos obtener la imagen de cualquier vector $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ a través de la aplicación lineal $df(x_0)$ mediante la fórmula ya conocida para aplicaciones lineales

$$df(x_0)(v) = Jf(x_0) \cdot v$$

donde estamos poniendo el vector v en columna.

A partir de esta fórmula obtenemos ésta otra ya conocida

$$df(x_0)(v_1, ..., v_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n$$

Además cuando la función f es real ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) la matriz jacobiana suele ponerse en forma de vector (fila o columna) y se le denomina también **vector gradiente de** f **en** x_0, denotándolo también así .

$$\bigtriangledown f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$$

Ejemplo 5.2 *Hallar la matriz jacobiana de la función*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \textit{dada por}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\sin x_1 \cos x_2 \sin x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3) \qquad \textit{en el punto } (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$$

$$\textit{Ésta es} \qquad Jf(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \qquad \textit{donde}$$

$f_1(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \sin x_3$	$f_2(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3$

En primer lugar tenemos que

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3$	$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3$	$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$	$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$	$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\cos x_1 \cos x_2 \sin x_3$

$$\textit{Así la matriz jacobiana es} \qquad Jf(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.3 *Hallar la matriz jacobiana en el punto* $(0, -1)$ *de la función*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \qquad \textit{dada por} \qquad f(x, y) = (x^2 - y, 0, \sin[xy], e^{2y})$$

$$\textit{Ésta es} \qquad Jf(0, -1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, -1) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, -1) \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(0, -1) \\ \\ \frac{\partial f_4}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial f_4}{\partial y}(0, -1) \end{pmatrix} \qquad \textit{donde}$$

$f_1(x, y) = x^2 - y$	$f_2(x, y) = 0$	$f_3(x, y) = \sin(xy)$	$f_4(x, y) = e^{2y}$

Entonces tenemos que

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$	$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y\cos(xy)$	$\frac{\partial f_3}{\partial y} = x\cos(xy)$	$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 2e^{2y}$

$$\textit{Así la matriz es} \qquad Jf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.4 *Calcular la matriz jacobiana de la función*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \textit{dada por} \qquad f(x, y, z) = (\log[xy], zx + y^2, \frac{z - y}{z - x} + \frac{\pi}{4} - 1)$$

en cualquier punto (x, y, z) *de su dominio.*

$$\textit{Ésta es} \qquad Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \qquad \textit{donde}$$

$f_1(x,y,z) = \log(xy)$	$f_2(x,y,z) = zx + y^2$	$f_3(x,y,z) = \frac{z-y}{z-x} + \frac{\pi}{4} - 1$

Tenemos que

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$	$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$	$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial f_2}{\partial x} = z$	$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y$	$\frac{\partial f_2}{\partial z} = x$	$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{z-y}{(z-x)^2}$	$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{-1}{z-x}$	$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{y-x}{(z-x)^2}$

Así la matriz es $$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 0 \\ z & 2y & x \\ \frac{z-y}{(z-x)^2} & \frac{-1}{z-x} & \frac{y-x}{(z-x)^2} \end{pmatrix}$$

*Para finalizar vamos a hallar la matriz jacobiana en el punto $P = (1, 1, \frac{\pi}{3} - 1)$ (se utilizará en el Ejemplo **??**). Sale*

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{3} - 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\frac{\pi}{3}-1} & \frac{-1}{\frac{\pi}{3}-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.5 *Hallar la matriz jacobiana en el punto $Q = (0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ de la función*

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \textit{dada por} \qquad g(x_1, x_2, x_3) = (\sin[x_1 x_2], \cos[2x_3 + 3x_2] \cos x_1)$$

Ésta es $$Jg(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(Q) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(Q) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(Q) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(Q) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(Q) & \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(Q) \end{pmatrix}$$ *donde*

$g_1(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1 x_2)$	$g_2(x_1,x_2,x_3) = \cos(2x_3 + 3x_2) \cos x_1$

En primer lugar tenemos que

$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 \cos(x_1 x_2)$	$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_1 x_2)$	$\frac{\partial g_1}{\partial x_3} = 0$

$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -\cos(2x_3 + 3x_2) \sin x_1$	$\frac{\partial g_2}{\partial x_2} = -3 \sin(2x_3 + 3x_2) \cos x_1$	$\frac{\partial g_2}{\partial x_3} = -2 \sin(2x_3 + 3x_2) \cos x_1$

Así la matriz es $$Jg(Q) = Jg(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6 El Teorema de la función compuesta (la Regla de la cadena)

Recordemos la regla de la cadena para funciones diferenciables:

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **es diferenciable en** x_0 **y** $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ **es diferenciable en** $f(x_0)$ **entonces la función compuesta** $g \circ f$ **es diferenciable en** x_0**.** Además

$$d(g \circ f)(x_0) = dg[f(x_0)] \circ df(x_0)$$

Esta fórmula dada sobre las diferenciales (que son aplicaciones lineales) puede expresarse en términos de sus matrices jacobianas (que son las matrices asociadas respecto de las bases canónicas) dándonos la siguiente **versión matricial de la regla de la cadena** (la cual nos dice que la **matriz jacobiana de la composición es el producto de las matrices jacobianas**):

Si f es una función diferenciable en x_0 y g es una función diferenciable en $f(x_0)$ entonces

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg[f(x_0)] \cdot Jf(x_0)$$

Ejemplo 6.1 *Con las notaciones de los dos últimos ejercicios hallemos la matriz jacobiana de la composición* $g \circ f$ *en el punto* $P = (1, 1, \frac{\pi}{3} - 1)$.

Tengamos en cuenta que $f(P) = f(1, 1, \frac{\pi}{3} - 1) = (0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) = Q$ *y que*

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ *y por tanto se puede realizar la composición* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Entonces se cumple que $J(g \circ f)(P) = Jg(Q) \cdot Jf(P) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{3} - 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{\frac{\pi}{3}-1} & -\frac{1}{\frac{\pi}{3}-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ \pi - 3 + \frac{2}{\frac{\pi}{3}-1} & 6 - \frac{2}{\frac{\pi}{3}-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Lo que hemos calculado en este último ejercicio va a ser analizado, en términos de las derivadas parciales, a continuación

Vamos a ver cómo **calcular las derivadas parciales de una composición de funciones** de la forma

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

a partir de las derivadas parciales de f y de g. Denotemos por $x = (x_1, ..., x_n)$ a las variables de $\mathbb{R}^n$, $u_1, ..., u_m$ a las variables de $\mathbb{R}^m$ y $f_1, ..., f_m$ a las funciones coordenadas de f (de hecho en la fórmula que vamos a ver pondremos igualmente f_i que u_i). Entonces a la hora de hallar la derivada parcial con respecto a x_i de la función $g \circ f$ se tiene que

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial g}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

Ejemplo 6.2 *Supongamos que tenemos funciones* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ *y que queremos derivar la composición en los puntos del dominio. Denominemos a estos puntos de forma genérica por* (x, y) *y a los del dominio de* f *por* (u_1, u_2, u_3). *Además usaremos la notación* $f = (f_1, f_2, f_3)$ *para las funciones coordenadas de* f. *Entonces*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u_1}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial u_2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial u_3}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u_1}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial u_2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial u_3}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y)$$

Ejemplo 6.3

Consideremos funciones $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *definidas por*

$f(x, y, z) = (x^2 z - 3\cos y, 3 - zy)$	$g(u, v) = ue^{-5v}$

Hallemos las derivadas parciales de la función compuesta $g \circ f$.

Como las funciones coordenadas de f *son*

$f_1(x, y, z) = x^2 z - 3\cos y$	$f_2(x, y, z) = 3 - zy$

es decir

$u = x^2 z - 3\cos y$	$v = 3 - zy$

obtenemos que

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(x, y, z)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(x, y, z)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z)$$

y como

$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = e^{-5v}$	$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -5ue^{-5v}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2xz$	$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = 0$

se tiene que

$\frac{\partial g}{\partial u}(f(x, y, z)) = e^{-5(3-zy)}$	$\frac{\partial g}{\partial v}(f(x, y, z)) = -5(x^2 z - 3\cos y)e^{-5(3-zy)}$

con lo que $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y,z) =$

$$= e^{-5(3-zy)}\cdot 2xz - 5(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}\cdot 0 = 2xze^{-5(3-zy)}$$

También tenemos que $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(f(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(f(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)$

y como $\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 3\sin y}\boxed{\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = -z}$ *se tiene que*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y,z) = e^{-5(3-zy)}\cdot 3\sin y - 5(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}\cdot(-z) =$$

$$= 3\sin y\; e^{-5(3-zy)} + 5z(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}$$

Finalmente obtenemos que

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y,z))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y,z))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)$$

y como $\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = x^2}\boxed{\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = -y}$ *se tiene que*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(x,y,z) = e^{-5(3-zy)}\cdot x^2 - 5(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}\cdot(-y) =$$

$$= x^2e^{-5(3-zy)} + 5y(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}$$

Si preferimos utilizar las matrices jacobianas (ES MUY RECOMENDABLE) tengamos en cuenta que

$$Jg(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y,z)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y,z)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-5(3-zy)} & -5(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)} \end{pmatrix}$$

y que $Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz & 3\sin y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$

y por tanto $\begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = J(g\circ f)(x,y,z) = Jg(f(x,y,z))\cdot Jf(x,y,z)$

$$= \begin{pmatrix} e^{-5(3-zy)} & -5(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2xz & 3\sin y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2xze^{-5(3-zy)} & 3\sin y\; e^{-5(3-zy)} + 5z(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)} & x^2e^{-5(3-zy)} + 5y(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)} \end{pmatrix}$$

También se puede utilizar el cálculo directo realizando antes la composición:

Como $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *se tiene que* $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *está definida por*

$$g\circ f(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x^2z-3\cos y, 3-zy) = (x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}$$

Y entonces las derivadas de esta función son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y,z) &= 2xze^{-5(3-zy)}\\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y,z) &= 3\sin y\; e^{-5(3-zy)} + 5z(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}\\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(x,y,z) &= x^2e^{-5(3-zy)} + 5y(x^2z-3\cos y)e^{-5(3-zy)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.4

Dadas funciones $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ *con* $g(u,v,w) = (wu^2e^v, v\cos w)$

y dado $Q \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(Q) = (-1, 0, \frac{\pi}{2})$ *y de modo que* $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(Q) = (1,-2,0)}\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(Q) = (2,-3,1)}$

hallemos las derivadas parciales de la composición $g \circ f$*.*

Como $\boxed{\frac{\partial g}{\partial u} = (2wue^v, 0)}\ \boxed{\frac{\partial g}{\partial v} = (wu^2e^v, \cos w)}\ \boxed{\frac{\partial g}{\partial w} = (u^2e^v, -v\sin w)}$ *y*

$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x}(Q) = 1}\ \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial x}(Q) = -2}\ \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial x}(Q) = 0}\ \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial y}(Q) = 2}\ \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial y}(Q) = -3}\ \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial y}(Q) = 1}$ *se tiene pues que*

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(Q) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(Q) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(Q) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x}(Q) =$$
$$= (-4,0)\cdot 1 + (2,0)\cdot(-2) + (1,1)\cdot 0 = (-8,0) \qquad y$$
$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(Q) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(Q) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(Q) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(Q)) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y}(Q) =$$
$$= (-4,0)\cdot 2 + (2,0)\cdot(-3) + (1,1)\cdot 1 = (-13,1)$$

Si utilizamos las matrices jacobianas obtenemos que

$$Jg(f(Q)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f(Q)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(Q)) & \frac{\partial g}{\partial w}(f(Q)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y \text{ que} \qquad Jf(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(Q) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(Q) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(Q) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \text{ por tanto}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(Q) & \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(Q) \end{pmatrix} = J(g\circ f)(Q) = Jg(f(Q))\cdot Jf(Q) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que obtenemos que $\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(Q)$ *es la primera columna y* $\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(Q)$ *la segunda.*

En este ejemplo no ha lugar el cálculo directo de la composición $g \circ f$ *para luego derivar, pues aunque se conoce la expresión de* g *no se conoce la de* f*.*

7 Cambios de coordenadas

Aquí vamos a tratar situaciones dentro de las cuáles está el cambio a coordenadas polares, pero pueden aparecernos cambios tanto de 2 como de más variables. Así partiremos originalmente de unas variables $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ para expresarlas en función de otras $(u_1, ..., u_n)$ mediante alguna relación. Entonces nos interesaremos por la matriz jacobiana del cambio. Si denominamos $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a la aplicación que define dicho cambio, en el sentido

$$(x_1, ..., x_n) = \Phi(u_1, ..., u_n).$$

Esto es así porque si tenemos ahora una función

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

que depende de las variables o coordenadas $(x_1, ..., x_n)$, una expresión que dependa de g y de algunas de sus derivadas parciales respecto de las variables $(x_1, ..., x_n)$ podemos representarla en función de la composición de $g \circ \Phi = G$ y algunas de sus derivadas parciales respecto de las variables $(u_1, ..., u_n)$ sin más que realizar el cambio de coordenadas. Aplicaremos para ello la fórmula

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Igual que para la derivación compuesta (de hecho es un caso particular) se puede dar la fórmula matricial con el jacobiano del cambio de coordenadas; incluso esto nos servirá para, mediante el jacobiano inverso, hallar las derivadas parciales del cambio inverso, conocidas las del cambio inicial; la fórmula anterior sería

$$Jg(x) = J(G \circ \Phi^{-1})(x) = JG(\Phi^{-1}(x)) \cdot J\Phi^{-1}(x)$$

para cada punto $x = (x_1, ...x_n)$, es decir

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_n} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \frac{\partial u_u}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{array} \right)$$

Si aparece alguna derivada parcial de orden superior se vuelve a aplicar reiteradamente la fórmula anterior.

Veamos en primer lugar algunos cambios de coordenadas usualmente empleados. Comenzaremos por el cambio a polares que ya conocemos:

Ejemplo 7.1 *1. (**Coordenadas polares**) La aplicación que nos da el cambio es $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = (x, y)$$

Esto suele expresarse habitualmente diciendo que hacemos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

Geométricamente ρ representa la longitud del segmento que une (x, y) con el origen y $\theta \in]0, 2\pi[$ el ángulo que forma el semieje OX positivo $\{y = 0, x \geq 0\}$ con dicho segmento. Ahora pueden obtenerse las derivadas parciales del cambio Φ

$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta$

y por tanto su jacobiano

$$J\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Despejando se obtiene el cambio inverso Φ^{-1}

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

es decir $$\Phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}) = (\rho, \theta)$$

(teniendo en cuenta que este último despeje se realiza en el cuadrante $x, y > 0$, haciéndose de otro modo en los otros cuadrantes).

Ahora puede obtenerse el jacobiano de Φ^{-1} a partir de las derivadas parciales

$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}$	$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\textit{luego} \qquad J\Phi^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

o tomándolo como inverso del otro jacobiano

$$J\Phi^{-1}(x,y)=J\Phi(\rho,\theta)^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Si tenemos ahora una función

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

se pueden relacionar sus parciales respecto de unas coordenadas y de otras, bien de modo directo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{\partial g}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial g}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho} \end{aligned}$$

o bien utilizando matrices jacobianas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial\rho} & \frac{\partial g}{\partial\theta} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial\rho} & \frac{\partial g}{\partial\theta} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho} & \frac{\partial g}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$

2. *(**Coordenadas cilíndricas**) La aplicación que nos da el cambio es $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\Phi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)=(x,y,z)$$

Esto suele expresarse habitualmente diciendo que hacemos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Geométricamente ρ representa la longitud del segmento que une $(x,y,0)$ con el origen (o lo que es lo mismo, la distancia del punto (x,y,z) al eje $0Z$) y $\theta\in]0,2\pi[$ el ángulo que forma el semieje $\{x\geq 0, y=z=0\}$ con dicho segmento.

El cambio inverso Φ^{-1} se obtiene despejando

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

es decir

$$\Phi^{-1}(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x},z)=(\rho,\theta,z)$$

(teniendo en cuenta que este último despeje se realiza en el cuadrante $x,y>0$, haciéndose de otro modo en los otros cuadrantes).

En el apéndice figuran los detalles de las derivadas parciales y los jacobianos de ambios cambios y de cómo emplearlos para relacionar las derivadas parciales de una función $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

3. *(**Coordenadas esféricas**) La aplicación que nos da el cambio es $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\phi) = (x, y, z)$$

Esto suele expresarse habitualmente diciendo que hacemos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Geométricamente ρ representa la longitud del segmento que une (x, y, z) con el origen, θ el ángulo (medido de 0 a 2π) que forma el semieje $\{x \geq 0, y = z = 0\}$ con la proyección del segmento anterior sobre el plano $z = 0$, y ϕ el ángulo (medido de 0 a π) que forma el eje OZ positivo $\{(x, y, z) : x = y = 0, z > 0\}$ con el segmento inicial.

El cambio inverso Φ^{-1} se obtiene despejando

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \\ \phi &= \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

es decir

$$(\rho, \theta, \phi) = \Phi^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan\frac{y}{x}, \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$$

Pasemos ya a realizar cambios de coordenadas en algunas expresiones.

Ejemplo 7.2 *Supongamos que tenemos una función*

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

que depende de las variables x e y. Mediante el cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ en el cuadrante $x, y > 0$ (despejando obtendríamos el cambio inverso que sería $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}$) vamos a transformar la expresión

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}$$

Ya hemos visto en el apartado correspondiente a coordenadas polares todo lo concerniente al cambio en sí, el cambio inverso, así como las parciales de ambos cambios de coordenadas y también cómo se relacionan las parciales de g en unas coordenadas y otras. Recordemos datos:

$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta$	$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}$	$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$

Luego tenemos que $$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = \rho\cos\theta(\frac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}) + \rho\sin\theta(\frac{\partial g}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}) =$$

$$= \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial g}{\partial \rho} + (\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta} = \rho\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

Recapitulando la cosa así:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = \rho\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

Ejemplo 7.3 *Supongamos que tenemos una función*

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

que depende de las variables x e y. Mediante el cambio a coordenadas polares en el cuadrante $x, y > 0$ vamos a transformar la expresión

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

Utilizamos las mismas fórmulas que en caso anterior y se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho} - (\frac{\partial g}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}) = (\cos\theta - \sin\theta)\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{(\sin\theta + \cos\theta)}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Ejemplo 7.4 *Supongamos que tenemos una función*

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que depende de las variables x, y, z. Mediante el cambio a coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$ en el cuadrante $x, y > 0$ (despejando obtendríamos el cambio inverso que sería $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}, z = z$) vamos a transformar la expresión

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + (\frac{\partial g}{\partial z})^2$$

Podemos utilizar las fórmulas que están puestas en el apéndice, aunque no obstante el cálculo directo de las derivadas parciales siguientes es sencillo:

$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho}$	$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Similarmente

$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}$	$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

Finalmente

$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$	$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$

En conclusión tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + (\frac{\partial g}{\partial z})^2 = (\frac{\partial g}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho})(\frac{\partial g}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}) + (\frac{\partial g}{\partial z})^2 =$$

$$= \sin\theta\cos\theta(\frac{\partial g}{\partial \rho})^2 + (\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\rho})\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(\frac{\partial g}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial g}{\partial z})^2$$

Ejemplo 7.5 *Para una función z de clase C^2 cambiar la expresión* $\quad z_{xx} + 4z_{xy} + 3z_{yy} \quad$ *con el cambio*

$$\begin{aligned} v &= 3x - y \\ u &= x + 2y \end{aligned}$$

En primer lugar se tiene que $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}$

Igualmente $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial u}$

Para las derivadas segundas se tiene que

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial(3\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u})}{\partial x} = 3\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial x} = 3[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}] + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 3 + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 1 = 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial(3\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u})}{\partial y} = 3\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial y} = 3[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}] + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot(-1) + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot 2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot(-1) + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2 = -3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial(-\frac{\partial z}{\partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial y} = -\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial y} + 2\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial y} = -[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}] + 2[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}] =$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot(-1) - \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot 2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot(-1) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2 = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

Finalmente se tiene que

$$z_{xx} + 4z_{xy} + 3z_{yy} = 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4(-3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}) + 3(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}) = 14\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 21\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$