Dinámica Topológica de Aplicaciones Triangulares Bidimensionales

Juan Luis García Guirao

Tesina de Licenciatura

Septiembre 2001

Problema General y Objetivos de la Memoria.

- **Problema General:** Si nos son dados:

  - X espacio topológico no vacío,
  - $\phi : X \to X$ endomorfismo continuo.

  Conocer la dinámica topológica del par (X, ϕ) ($\equiv$ Sistema Dinámico Discreto (S.D.D.) asociado o inducido por el endomorfismo ϕ), consiste en tener conocimiento en términos de descripción explícita y de propiedades topológicas de lo que ocurre para cada $x \in X$ con el conjunto

$$Orb_\phi(x) = \{\phi^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

  donde $\phi^n(x) = \phi(\phi^{n-1}(x))$ $n \in \mathbb{N}$ y $\phi^0 = Id_X$.

- **Metodología de Trabajo:** La filosofía de trabajo que la comunidad científica ha decidido seguir con el fin de resolver esta cuestión es su estudio preliminar en dominios sencillos con el fin de poder inferir información al problema general, además estos sistemas son la modelización matemática de numerosos fenómenos naturales:

  Espacios métricos compactos con topológias conocidas.

- **Metodología de Trabajo:** La filosofía de trabajo que la comunidad científica ha decidido seguir con el fin de resolver esta cuestión es su estudio preliminar en dominios sencillos con el fin de poder inferir información al problema general, además estos sistemas son la modelización matemática de numerosos fenómenos naturales:

  Espacios métricos compactos con topológias conocidas.

  Recientemente han sido ámpliamente estudiados:

  1. Espacios de dimensión cero como

  $$X = \Sigma^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

  2. Espacios de dimensión uno como:

     - $X = I = [0, 1]$,
     - $X = \$^1$,
     - $X =$ Árboles, gráfos, dendritas y dendroides.

- **Objetivos de la Memoria:** Siguiendo esta línea de investigación parece natural como siguiente paso para avanzar en la comprensión del problema comenzar el estudio de sistemas con dominios bidimensionales.

  Dada la máxima de tratar espacios sencillos parece razonable abordar el estudio de:

$$(I^2 = [0,1] \times [0,1], \tau_{\mathbb{R}^2}|_{I^2}).$$

  Consideraremos $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ trasformaciones continuas de I^2 y para cada $(x,y) \in I^2$ nos planteamos el problema de describir el conjunto

$$Orb_F(x,y) = \{F^n(x,y) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

- **Objetivos de la Memoria:** Siguiendo esta línea de investigación parece natural como siguiente paso para avanzar en la comprensión del problema comenzar el estudio de sistemas con dominios bidimensionales.

  Dada la máxima de tratar espacios sencillos parece razonable abordar el estudio de:

$$(I^2 = [0,1] \times [0,1], \tau_{\mathbb{R}^2}|_{I^2}).$$

  Consideraremos $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ trasformaciones continuas de I^2 y para cada $(x,y) \in I^2$ nos planteamos el problema de describir el conjunto

$$Orb_F(x,y) = \{F^n(x,y) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

  Como metodología de trabajo consideraremos ciertas familias de aplicaciones

$$\mathcal{F} \subset C(I^2, I^2)$$

  sujetas a ciertas propiedades que disminuyan la dificultad de este problema. En este sentido aparecen de modo natural las aplicaciones triangulares de I^2 núcleo central de estudio en esta memoria.

Definición . *Una aplicación triangular de* I^2 *es una trasformación continua* $F : I^2 \longrightarrow I^2$ *de la forma*

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde $f \in C(I, I)$ *y* $g \in C(I^2, I)$*. A la función* f *se la llama base de la aplicación triangular* F*. Y mediante* $Tr(I^2, I^2)$ *denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares de* I^2*.*

Definición . *Una aplicación triangular de I^2 es una trasformación continua $F : I^2 \to I^2$ de la forma*

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde $f \in C(I, I)$ y $g \in C(I^2, I)$. A la función f se la llama base de la aplicación triangular F. Y mediante $Tr(I^2, I^2)$ denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares de I^2.

El estudio de la clase $Tr(I^2, I^2)$ es importante por dos motivos:

Definición . *Una aplicación triangular de* I^2 *es una trasformación continua* $F : I^2 \to I^2$ *de la forma*

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde $f \in C(I, I)$ *y* $g \in C(I^2, I)$*. A la función* f *se la llama base de la aplicación triangular* F*. Y mediante* $Tr(I^2, I^2)$ *denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares de* I^2*.*

El estudio de la clase $Tr(I^2, I^2)$ es importante por dos motivos:

1. Por su especial morfología la dinámica triangular esta fuertemente influenciada por la dinámica de su aplicación base que posee dominio unidimensional.

Definición . *Una aplicación triangular de I^2 es una trasformación continua $F : I^2 \to I^2$ de la forma*

$$F(x,y) = (f(x), g(x,y))$$

donde $f \in C(I,I)$ y $g \in C(I^2,I)$. A la función f se la llama base de la aplicación triangular F. Y mediante $Tr(I^2,I^2)$ denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares de I^2.

El estudio de la clase $Tr(I^2,I^2)$ es importante por dos motivos:

1. Por su especial morfología la dinámica triangular esta fuertemente influenciada por la dinámica de su aplicación base que posee dominio unidimensional.
2. Los elementos de $Tr(I^2,I^2)$ no dejan de ser referentes del ámbito bidimensional.

Definición . *Una aplicación triangular de I^2 es una trasformación continua $F : I^2 \to I^2$ de la forma*

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde $f \in C(I, I)$ y $g \in C(I^2, I)$. A la función f se la llama base de la aplicación triangular F. Y mediante $Tr(I^2, I^2)$ denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares de I^2.

El estudio de la clase $Tr(I^2, I^2)$ es importante por dos motivos:

1. Por su especial morfología la dinámica triangular esta fuertemente influenciada por la dinámica de su aplicación base que posee dominio unidimensional.
2. Los elementos de $Tr(I^2, I^2)$ no dejan de ser referentes del ámbito bidimensional.

En la memoria planteamos un estudio exhaustivo y detallado de ciertas propiedades de similitud y diferencia entre las clases de aplicaciones:

$$Tr(I^2, I^2) \qquad \text{y} \qquad C(I, I).$$

1. Notación y Resultados Preliminares.

1. Notación y Resultados Preliminares.

1.1 La noción de Sistema Dinámico.

1. Notación y Resultados Preliminares.

1.1 La noción de Sistema Dinámico.

Definición 1.1.1. *Llamaremos Sistema Dinámico (S.D.) a una terna* (X, T, φ) *consistente en:*

X : *Espacio de estados, a menudo llamado espacio de fases siguiendo la nomenclatura de la Mecánica Clásica,*

T : *Conjunto de tiempos,*

φ : *Flujo u operador de evolución,*

verificando las siguientes condiciones:

(i) X *es un espacio topológico no vacío,*

(ii) T *es un subgrupo aditivo de* $\mathbb{R}$*,*

(iii) $\varphi : X \times T \to X$ *es una aplicación continua que cumple:*

$$\varphi(0,x) = x \text{ para cada } x \in X, \text{ i.e., } \varphi_0(x) = \text{Identidad en } X,$$

$$\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x) \text{ para cada } t,s \in T \text{ y cada } x \in X.$$

Además, si el subgrupo $T = \mathbb{Z}$ (o bien $\mathbb{N} \cup \{0\}$, o bien $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$) diremos que el S.D. es discreto (S.D.D.); si $T = \mathbb{R}$ (o bien $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, o bien $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$) diremos que el S.D. es continuo (S.D.C.).

$$\varphi(0,x) = x \textit{ para cada } x \in X, \textit{ i.e., } \varphi_0(x) = \textit{Identidad en } X,$$

$$\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x) \textit{ para cada } t,s \in T \textit{ y cada } x \in X.$$

Además, si el subgrupo $T = \mathbb{Z}$ (o bien $\mathbb{N} \cup \{0\}$, o bien $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$) diremos que el S.D. es discreto (S.D.D.); si $T = \mathbb{R}$ (o bien $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, o bien $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$) diremos que el S.D. es continuo (S.D.C.).

En esta memoria usaremos exclusivamente S.D.D. *asociados o inducidos* por una aplicación continua $\phi : X \to X$, en cuyo caso el sistema (X, T, φ) vendrá dado por:

X : Espacio topológico no vacío,

T : $\mathbb{N} \cup \{0\}$(o $\mathbb{Z}$ cuando se trate de un difeomorfismo),

$\varphi : T \times X \to X$ tal que $\varphi(n,x) = \phi^n(x)$,

donde $\phi^0(x) = Identidad\ en\ X$ y $\phi^n(x) = \phi(\phi^{n-1}(x))$ para $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Enumeración de puntos especiales en un S.D. (E.P.E.)

1.2 Enumeración de puntos especiales en un S.D. (E.P.E.)

Dado (X, ϕ) un S.D.D. y $x \in X$:

(a) Se dirá que x es un punto *periódico* de período un entero positivo n para la aplicación ϕ, si $\phi^n(x) = x$ y para cualquier entero positivo $k < n$, $\phi^k(x) \neq x$. Los conjuntos de todos los puntos periódicos, así como, de todos los períodos de puntos periódicos de ϕ se denotarán respectivamente con $Per(\phi)$ y $period(\phi)$.

1.2 Enumeración de puntos especiales en un S.D. (E.P.E.)

Dado (X, ϕ) un S.D.D. y $x \in X$:

(a) Se dirá que x es un punto *periódico* de período un entero positivo n para la aplicación ϕ, si $\phi^n(x) = x$ y para cualquier entero positivo $k < n$, $\phi^k(x) \neq x$. Los conjuntos de todos los puntos periódicos, así como, de todos los períodos de puntos periódicos de ϕ se denotarán respectivamente con $Per(\phi)$ y $period(\phi)$.

(b) El conjunto formado por todos los puntos de aglomeración de $Orb_\phi(x)$ se llamará *ω-límite* del punto x mediante la aplicación ϕ y se denotará con $\omega_\phi(x)$. Llamaremos *ω-límite global* de la aplicación ϕ, o simplemente el ω-límite de la aplicación ϕ, a la familia de conjuntos $\mathcal{W}(\phi) = \{\omega_\phi(x) : x \in X\}$. Con $\omega(\phi)$ denotaremos al conjunto $\bigcup_{x \in X} \omega_\phi(x)$.

1.2 Enumeración de puntos especiales en un S.D. (E.P.E.)

Dado (X, ϕ) un S.D.D. y $x \in X$:

(a) Se dirá que x es un punto *periódico* de período un entero positivo n para la aplicación ϕ, si $\phi^n(x) = x$ y para cualquier entero positivo $k < n$, $\phi^k(x) \neq x$. Los conjuntos de todos los puntos periódicos, así como, de todos los períodos de puntos periódicos de ϕ se denotarán respectivamente con $Per(\phi)$ y $period(\phi)$.

(b) El conjunto formado por todos los puntos de aglomeración de $Orb_\phi(x)$ se llamará *ω-límite* del punto x mediante la aplicación ϕ y se denotará con $\omega_\phi(x)$. Llamaremos *ω-límite global* de la aplicación ϕ, o simplemente el ω-límite de la aplicación ϕ, a la familia de conjuntos $\mathcal{W}(\phi) = \{\omega_\phi(x) : x \in X\}$. Con $\omega(\phi)$ denotaremos al conjunto $\bigcup_{x \in X} \omega_\phi(x)$.

(c) Se dirá que x es un punto *recurrente* para la aplicación ϕ si pertenece a $\omega_\phi(x)$. El conjunto de todos los puntos recurrentes para la aplicación ϕ se denotará con $Rec(\phi)$.

(d) Llamaremos *centro* del S.D.D. (X, ϕ) al conjunto $\overline{Rec(\phi)}$, donde dicho cierre se efectúa en la topología que el espacio X posee. Lo denotaremos con $C(\phi)$.

(d) Llamaremos *centro* del S.D.D. (X, ϕ) al conjunto $\overline{Rec(\phi)}$, donde dicho cierre se efectúa en la topología que el espacio X posee. Lo denotaremos con $C(\phi)$.

(e) Se dirá que x es un punto *no-errante* (non-wandering) para la aplicación ϕ si, para todo $U(x)$ entorno de x, existe n entero positivo de forma que $\phi^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no-errantes de ϕ se denotará con $\Omega(\phi)$.

(d) Llamaremos *centro* del S.D.D. (X, ϕ) al conjunto $\overline{Rec(\phi)}$, donde dicho cierre se efectúa en la topología que el espacio X posee. Lo denotaremos con $C(\phi)$.

(e) Se dirá que x es un punto *no-errante* (non-wandering) para la aplicación ϕ si, para todo $U(x)$ entorno de x, existe n entero positivo de forma que $\phi^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no-errantes de ϕ se denotará con $\Omega(\phi)$.

(f) Se dirá que x es un punto *uniformemente recurrente* para la aplicación ϕ si, para cada $U(x)$ entorno de x, existe $N = N(U) > 0$ entero de modo que para cada $q > 0$ existe r tal que $q \leq r < q + N$, verificando que $\phi^r(x) \in U$.

(d) Llamaremos *centro* del S.D.D. (X, ϕ) al conjunto $\overline{Rec(\phi)}$, donde dicho cierre se efectúa en la topología que el espacio X posee. Lo denotaremos con $C(\phi)$.

(e) Se dirá que x es un punto *no-errante* (non-wandering) para la aplicación ϕ si, para todo $U(x)$ entorno de x, existe n entero positivo de forma que $\phi^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no-errantes de ϕ se denotará con $\Omega(\phi)$.

(f) Se dirá que x es un punto *uniformemente recurrente* para la aplicación ϕ si, para cada $U(x)$ entorno de x, existe $N = N(U) > 0$ entero de modo que para cada $q > 0$ existe r tal que $q \leq r < q + N$, verificando que $\phi^r(x) \in U$.

Si el sistema (X, ϕ) verifica que el espacio topológico X es métrico con función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tenemos, además de las anteriores, la siguiente noción:

(g) Se dirá que x es un punto *recurrente en cadena* (chain-recurrent) para la aplicación ϕ si, para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_0, \ldots., x_n \in X, x_0 = x_n = x$, tales que $d(x_{i+1}, \phi(x_i)) < \varepsilon$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. El conjunto de todos los puntos cadena recurrentes para ϕ se denotará por $CR(\phi)$ y a los puntos $x_0, \ldots., x_n \in X$ verificando la propiedad antes descrita se los conoce como una ε-cadena para el punto x.

(g) Se dirá que x es un punto *recurrente en cadena* (chain-recurrent) para la aplicación ϕ si, para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_0, ..., x_n \in X, x_0 = x_n = x$, tales que $d(x_{i+1}, \phi(x_i)) < \varepsilon$ para $i \in \{0, ..., n-1\}$. El conjunto de todos los puntos cadena recurrentes para ϕ se denotará por $CR(\phi)$ y a los puntos $x_0, ..., x_n \in X$ verificando la propiedad antes descrita se los conoce como una ε-cadena para el punto x.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico. Si $\phi : X \to X$ es una aplicación continua, diremos que:*

(i) ϕ es de tipo $< 2^\infty$ si existe k entero no negativo, de modo que todos sus puntos periódicos posean período de la forma 2^j con $j \in \{0, 1, ..., k\}$.

(ii) ϕ es de tipo 2^∞ si todos sus puntos periódicos poseen período de la forma 2^n con $n \geq 0$ entero.

(iii) ϕ es de tipo $> 2^\infty$ si posee algún punto periódico de período no potencia de 2.

1.3 El teorema de Sharkovskii.

1.3 El teorema de Sharkovskii.

Teorema 1.3.1.(Sharkovskii) *Consideremos en* $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ *el siguiente orden al que llamaremos ordenamiento de Sharkovskii :*

$$3 >_s 5 >_s 7 >_s ... >_s 2{\cdot}3 >_s 2{\cdot}5 >_s 2{\cdot}7 >_s ... >_s 2^2{\cdot}3 >_s 2^2{\cdot}5 >_s 2^2{\cdot}7 >_s ...$$

$$... >_s 2^m{\cdot}3 >_s 2^m{\cdot}5 >_s .. >_s \{2^\infty\} >_s .. >_s 2^j >_s 2^{j-1} > .. >_s 2^2 >_s 2 >_s 1.$$

Sea $f : I \to I$ *una función continua. Si* f *tiene un punto periódico de período* m*, entonces* f *posee puntos periódicos de todos los períodos menores que* m *en el anterior orden.*

Recíprocamente, dado cualquier elemento m *de la ordenación anterior existe* $f : I \to I$ *continua con al menos un punto periódico de período* m *y ningún punto periódico de período mayor que* m *en el orden de Sharkovskii.*

1.3 El teorema de Sharkovskii.

Teorema 1.3.1.(Sharkovskii) *Consideremos en* $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ *el siguiente orden al que llamaremos ordenamiento de Sharkovskii :*

$$3 >_s 5 >_s 7 >_s \ldots >_s 2{\cdot}3 >_s 2{\cdot}5 >_s 2{\cdot}7 >_s \ldots >_s 2^2{\cdot}3 >_s 2^2{\cdot}5 >_s 2^2{\cdot}7 >_s \ldots$$

$$\ldots >_s 2^m{\cdot}3 >_s 2^m{\cdot}5 >_s .. >_s \{2^\infty\} >_s .. >_s 2^j >_s 2^{j-1} > .. >_s 2^2 >_s 2 >_s 1.$$

Sea $f : I \to I$ *una función continua. Si* f *tiene un punto periódico de período* m*, entonces* f *posee puntos periódicos de todos los períodos menores que* m *en el anterior orden.*

Recíprocamente, dado cualquier elemento m *de la ordenación anterior existe* $f : I \to I$ *continua con al menos un punto periódico de período* m *y ningún punto periódico de período mayor que* m *en el orden de Sharkovskii.*

El teorema de Sharkovskii es en general FALSO en dimensión mayor que uno (incluso para otros espacios de dimensión uno como: árboles, grafos, dendritas, dendroides, $\$^1$,... sólo es válido para ciertos tipos de endomorfismos).

Contraejemplo . En $\mathbb{R}^2$ un giro de centro (0,0) y ángulo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ es una aplicación continua con todos sus puntos periódicos y de período tres y por tanto no satisface el teorema de Sharkovskii.

Contraejemplo . En $\mathbb{R}^2$ un giro de centro (0,0) y ángulo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ es una aplicación continua con todos sus puntos periódicos y de período tres y por tanto no satisface el teorema de Sharkovskii.

1.3 El teorema de Baire-Hausdorff.

Contraejemplo . En $\mathbb{R}^2$ un giro de centro (0,0) y ángulo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ es una aplicación continua con todos sus puntos periódicos y de período tres y por tanto no satisface el teorema de Sharkovskii.

1.3 El teorema de Baire-Hausdorff.

Reseña bibliográfica: *Topologie* de Alexandroff y Hopf.

Contraejemplo . En $\mathbb{R}^2$ un giro de centro (0,0) y ángulo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ es una aplicación continua con todos sus puntos periódicos y de período tres y por tanto no satisface el teorema de Sharkovskii.

1.3 El teorema de Baire-Hausdorff.

Reseña bibliográfica: *Topologie* de Alexandroff y Hopf.

Definición 1.4.1. *Sea X un espacio topológico. Un sistema ordenado de conjuntos monótono creciente (resp. decreciente) en X es una familia trasfinita de subconjuntos de X,*

$$\mathcal{G} = \{G_1, G_2, ..., G_\alpha, G_{\alpha+1}, ...\},$$

con α el primer ordinal no numerable, tal que $G_\beta \subsetneqq G_{\beta+1}$ (resp. $G_\beta \supsetneqq G_{\beta+1}$) con $\beta \in \mathbb{N} \cup \mathbb{O}$.

Teorema 1.4.2.(Baire-Hausdorff) *Sea X un espacio topológico con base numerable. Entonces, cada sistema ordenado monótono de conjuntos abiertos (resp. cerrados) distintos dos a dos en X, es a lo sumo numerable.*

Teorema 1.4.2.(Baire-Hausdorff) *Sea X un espacio topológico con base numerable. Entonces, cada sistema ordenado monótono de conjuntos abiertos (resp. cerrados) distintos dos a dos en X, es a lo sumo numerable.*

Como aplicación del teorema de Baire-Hausdorff, probaremos un resultado de Brouwer sobre propiedades inductivas.

Teorema 1.4.2.(Baire-Hausdorff) *Sea X un espacio topológico con base numerable. Entonces, cada sistema ordenado monótono de conjuntos abiertos (resp. cerrados) distintos dos a dos en X, es a lo sumo numerable.*

Como aplicación del teorema de Baire-Hausdorff, probaremos un resultado de Brouwer sobre propiedades inductivas.

Definición 1.4.3. *Sea X un espacio topológico compacto.*

(i) *Una propiedad P sobre los subconjuntos compactos de X se dice inductiva si, dado*

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_\alpha, F_{\alpha+1}, ...\},$$

con α el primer ordinal no numerable, sistema ordenado monótono decreciente formado por subconjuntos compactos de X que satisfacen P, entonces el compacto

$$F_0 = \bigcap_{F_\beta \in \mathcal{F}} F_\beta$$

satisface P.

(ii) Un subconjunto compacto A *de* X *es irreducible con respecto a una propiedad* P *si ningún subconjunto compacto propio de* A *tiene* P.

satisface P.

(ii) *Un subconjunto compacto A de X es irreducible con respecto a una propiedad P si ningún subconjunto compacto propio de A tiene P.*

Corolario 1.3.1.(Reducción de Brouwer) *Sea X un espacio topológico con base numerable. Cada subconjunto compacto F de X que satisfaga una propiedad inductiva P, contiene al menos un subconjunto compacto irreducible, F', satisfaciendo P.*

2. Similitudes entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

2. Similitudes entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

2.1 El teorema de la proyección

2. Similitudes entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

2.1 El teorema de la proyección

Dada $f : I \to I$ continua y $x \in I$ un elemento de la E.P.E., planteamos el siguiente PROBLEMA:

Encontrar una aplicación triangular de I^2, F, con base f para la que exista un punto (x, y) perteneciente a la misma clase en E.P.E. que x, tal que $Pr(x, y) = x$ donde $Pr(\cdot, \cdot)$ es la proyección canónica de I^2 sobre I en la primera variable. La respuesta a este problema se recoge en el siguiente resultado obra de S. F. Kolyada [Erg. Theo. 12, 1992]

2. Similitudes entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

2.1 El teorema de la proyección

Dada $f : I \to I$ continua y $x \in I$ un elemento de la E.P.E., planteamos el siguiente PROBLEMA:

Encontrar una aplicación triangular de I^2, F, con base f para la que exista un punto (x, y) perteneciente a la misma clase en E.P.E. que x, tal que $Pr(x, y) = x$ donde $Pr(\cdot, \cdot)$ es la proyección canónica de I^2 sobre I en la primera variable. La respuesta a este problema se recoge en el siguiente resultado obra de S. F. Kolyada [Erg. Theo. 12, 1992]

Teorema 2.2.2.(Proyección) *Sea $A(F, I^2)$ uno cualquiera de los conjuntos previamente descritos en la E.P.E. para F; al mismo conjunto para la base lo denotaremos por $A(f, I)$. Entonces se verifica*

$$Pr(A(F, I^2)) = A(f, I).$$

2.2 El teorema de Sharkovskii en $Tr(I^2, I^2)$.

2.2 El teorema de Sharkovskii en $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 2.3.1.(Sharkovskii en $Tr(I^2, I^2)$)*Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular. Entonces, el conjunto de los períodos de los puntos periódicos de F sigue el ordenamiento de Sharkovskii. Además, para cada natural m existe F triangular en I^2 con al menos un punto periódico de periódo m y ningún punto periódico de período mayor que m en el orden de Sharkovskii.*

2.2 El teorema de Sharkovskii en $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 2.3.1.(Sharkovskii en $Tr(I^2, I^2)$)*Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular. Entonces, el conjunto de los períodos de los puntos periódicos de F sigue el ordenamiento de Sharkovskii. Además, para cada natural m existe F triangular en I^2 con al menos un punto periódico de periódo m y ningún punto periódico de período mayor que m en el orden de Sharkovskii.*

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico no vacío. Diremos que una aplicación continua $F : X^n \to X^n$, donde $n \geq 2$ es un entero positivo y $X^n = \overbrace{X \times ... \times X}^{n}$, es una aplicación triangular en X^n, si $F = (f_1, ...f_n)$ donde $f_i : X^n \to X$ es una aplicación continua que depende únicamente de las variables $x_1, ..., x_i$ para $i = 1, ..., n$, es decir, $f_i(x_1, ..., x_n) = \widetilde{f}_i(x_1, ..., x_i)$.*

2.3 El teorema de Jungck.

2.3 El teorema de Jungck.

Definición 2.4.1. *Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones continuas. Se dirá que f y g son compatibles si conmutan respecto de la composición de aplicaciones en el conjunto*

$$Coin(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Si f y g son compatibles y $Coin(f, g) \neq \emptyset$ diremos que f y g son aplicaciones no-trivialmente compatibles.

2.3 El teorema de Jungck.

Definición 2.4.1. *Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones continuas. Se dirá que f y g son compatibles si conmutan respecto de la composición de aplicaciones en el conjunto*

$$Coin(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Si f y g son compatibles y $Coin(f, g) \neq \emptyset$ diremos que f y g son aplicaciones no-trivialmente compatibles.

Teorema 2.4.6.(Jungck) *Si $g : I \to I$ es una función continua, g tiene un punto fijo en común con cualquier función continua $f : I \to I$ con la que sea no-trivialmente compatible, si y sólo si, $Per(g) = Fix(g)$.*

Teorema 2.4.13.(Jungck en $Tr(I^n, I^n)$) *Sea $n \geq 2$ un entero y consideremos $G = (g_1, g_2, ..., g_n)_\triangle \in Tr(I^n, I^n)$ una aplicación triangular. Entonces G tiene un punto fijo en común con cualquier aplicación triangular $F = (f_1, f_2, ..., f_n)_\triangle \in Tr(I^n, I^n)$ con la que sea no-trivialmente compatible, si y sólo si, se verifica la igualdad $Per(G) = Fix(G)$.*

Teorema 2.4.13.(Jungck en $Tr(I^n, I^n)$) *Sea $n \geq 2$ un entero y consideremos $G = (g_1, g_2, ..., g_n)_\triangle \in Tr(I^n, I^n)$ una aplicación triangular. Entonces G tiene un punto fijo en común con cualquier aplicación triangular $F = (f_1, f_2, ..., f_n)_\triangle \in Tr(I^n, I^n)$ con la que sea no-trivialmente compatible, si y sólo si, se verifica la igualdad $Per(G) = Fix(G)$.*

Jungck unidimensional $\longrightarrow$ Teorema de los Valores Intermedios (T.V.I.)

Jungck n-dimensional $\longrightarrow$ Teoremas de Extensión Topológica

$$+$$

Inducción.

2.4 Caoticidad Li-Yorke en $Rec(F)$.

2.4 Caoticidad Li-Yorke en $Rec(F)$.

Definición 2.5.1. *Consideremos* (X, d) *un espacio métrico compacto y una aplicación continua* $\phi : X \to X$*. Un subconjunto* $E \subset X$ *se dirá* $(n, \varepsilon) - separado$ *si para cada dos puntos distintos* z_1, z_2 *de* E *existe un elemento* $j \in \{0, ..., n-1\}$ *verificando*

$$d(\phi^j(z_1), \phi^j(z_2)) > \varepsilon.$$

Sea $M \subset X$ *un subconjunto compacto. Denotaremos con* $s_n(\varepsilon, M, \phi)$ *la cardinalidad del mayor conjunto* $(n, \varepsilon) - separado$ *de* M *posible. Entonces se define la entropía topológica de* ϕ *respecto del compacto* $M \subset X$ *como*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, M, \phi)$$

y se denotará con $h_d(\phi, M)$*. Llamaremos entropía de* ϕ *al valor* $h_d(\phi, X)$ *y la denotaremos con* $h_d(\phi)$*.*

Definición 2.5.2. *Sea* $\phi : X \to X$ *una aplicación continua. Diremos que la aplicación* ϕ *es caótica (en el sentido de Li-Yorke), si existe* $A \subseteq X$*, con cardinal superior o igual a dos, tal que para cada* $x, y \in A$ *se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$(i)\ \limsup_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) > 0$$

$$(ii)\ \liminf_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) = 0$$

En tal caso, se dirá que A *es un conjunto "scrambled".*

Definición 2.5.2. *Sea $\phi : X \to X$ una aplicación continua. Diremos que la aplicación ϕ es caótica (en el sentido de Li-Yorke), si existe $A \subseteq X$, con cardinal superior o igual a dos, tal que para cada $x, y \in A$ se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$(i)\ \limsup_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) > 0$$

$$(ii)\ \liminf_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) = 0$$

En tal caso, se dirá que A es un conjunto "scrambled".

Teorema 2.5.7. *Sea $f : I \to I$ una función continua del intervalo. Si f es de tipo $< 2^\infty$, entonces f es no caótica.*

Definición 2.5.2. *Sea $\phi : X \to X$ una aplicación continua. Diremos que la aplicación ϕ es caótica (en el sentido de Li-Yorke), si existe $A \subseteq X$, con cardinal superior o igual a dos, tal que para cada $x, y \in A$ se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

$$(i)\ \limsup_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) > 0$$

$$(ii)\ \liminf_{n\to\infty} d(\phi^n(x), \phi^n(y)) = 0$$

En tal caso, se dirá que A es un conjunto "scrambled".

Teorema 2.5.7. *Sea $f : I \to I$ una función continua del intervalo. Si f es de tipo $< 2^\infty$, entonces f es no caótica.*

Corolario 2.5.7.1. *Sea $f : I \to I$ una función continua del intervalo. Si f es de tipo $< 2^\infty$, entonces $f|_{Rec(f)}$ es no caótica.*

Teorema 2.5.10. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f tal que $Per(f)$ es cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) $Rec(F) \neq UR(F)$,

(ii) $F|_{Rec(F)}$ *es caótica.*

Teorema 2.5.10. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f tal que $Per(f)$ es cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) $Rec(F) \neq UR(F)$,

(ii) $F|_{Rec(F)}$ *es caótica.*

Corolario 2.5.10.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f. Entonces, si F es de tipo $< 2^\infty$, $F|_{Rec(F)}$ es no caótica.*

Teorema 2.5.10. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f tal que $Per(f)$ es cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) $Rec(F) \neq UR(F)$,

(ii) $F|_{Rec(F)}$ *es caótica.*

Corolario 2.5.10.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f. Entonces, si F es de tipo $< 2^\infty$, $F|_{Rec(F)}$ es no caótica.*

2.5 Recurrencia en cadena.

Teorema 2.5.10. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f tal que $Per(f)$ es cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) $Rec(F) \neq UR(F)$,

(ii) $F|_{Rec(F)}$ *es caótica.*

Corolario 2.5.10.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f. Entonces, si F es de tipo $< 2^\infty$, $F|_{Rec(F)}$ es no caótica.*

2.5 Recurrencia en cadena.

En $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$ existen elementos que poseen todos sus puntos recurrentes en cadena.

En $C(I, I)$:

En $C(I, I)$:

Ejemplo 2.6.2.(Block-Coven) Realizaremos la construcción, con el fin de simplificar las expresiones, en el caso $I = [0, 3]$. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1, 2], \\ -3(x - 3) & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

En $C(I,I)$:

Ejemplo 2.6.2.(Block-Coven) Realizaremos la construcción, con el fin de simplificar las expresiones, en el caso $I=[0,3]$. Consideremos

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\in[0,1],\\ 2x-1 & \text{si } x\in[1,2],\\ -3(x-3) & \text{si } x\in[2,3].\end{cases}$$

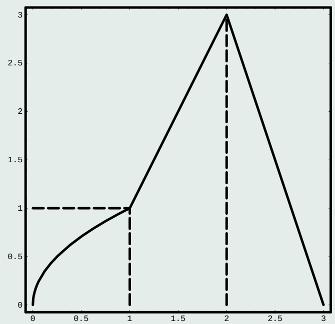

Figure 1: Ejemplo de Block y Coven

Fijado $\varepsilon > 0$, la existencia una ε-cadena para cada punto $x \in I$ se sigue inmediatamente de los siguientes hechos obvios a la luz de la Figura 1:

Fijado $\varepsilon > 0$, la existencia una ε-cadena para cada punto $x \in I$ se sigue inmediatamente de los siguientes hechos obvios a la luz de la Figura 1:

(a) f es una función continua,

(b) el punto fijo $y_1 = 1$ es atractor,

(c) el punto $y_2 = 2$ es atractor,

(d) la pendiente de f en el intervalo $[2, 3]$ es negativa, lo que fuerza a un retroceso de las iteradas.

Fijado $\varepsilon > 0$, la existencia una ε-cadena para cada punto $x \in I$ se sigue inmediatamente de los siguientes hechos obvios a la luz de la Figura 1:

(a) f es una función continua,

(b) el punto fijo $y_1 = 1$ es atractor,

(c) el punto $y_2 = 2$ es atractor,

(d) la pendiente de f en el intervalo $[2, 3]$ es negativa, lo que fuerza a un retroceso de las iteradas.

En $Tr(I^2, I^2)$:

Fijado $\varepsilon > 0$, la existencia una ε-cadena para cada punto $x \in I$ se sigue inmediatamente de los siguientes hechos obvios a la luz de la Figura 1:

(a) f es una función continua,

(b) el punto fijo $y_1 = 1$ es atractor,

(c) el punto $y_2 = 2$ es atractor,

(d) la pendiente de f en el intervalo $[2, 3]$ es negativa, lo que fuerza a un retroceso de las iteradas.

En $Tr(I^2, I^2)$:

Ejemplo 2.6.4.(Forti-Paganoni) Definimos el siguiente elemento de $Tr(I^2, I^2)$:

$$F(x, y) = (x, y^{\frac{1+x}{2}}).$$

F satisface la siguientes propiedades que permiten construir una ε-cadena para cada punto a través de $Fix(F)$:

(a) $F(0, y) = (0, \sqrt{y})$ y $F(1, y) = (1, y)$,

(b) $Per(F) = Fix(F) = \{(x, 0)\}_{x \in I} \cup \{(x, 1)\}_{x \in I} \cup \{(1, y)\}_{y \in I}$,

(c) Si $z = (x, y) \in I^2$ con $x < 1$, $y > 0$, entonces $\omega_F(z) = (x, 1)$ y por tanto $\omega_F(z)$ es un ciclo.

F satisface la siguientes propiedades que permiten construir una ε-cadena para cada punto a través de $Fix(F)$:

(a) $F(0,y) = (0, \sqrt{y})$ y $F(1,y) = (1,y)$,

(b) $Per(F) = Fix(F) = \{(x,0)\}_{x\in I} \cup \{(x,1)\}_{x\in I} \cup \{(1,y)\}_{y\in I}$,

(c) Si $z = (x,y) \in I^2$ con $x < 1$, $y > 0$, entonces $\omega_F(z) = (x,1)$ y por tanto $\omega_F(z)$ es un ciclo.

Nota . La dinámica de ámbas aplicaciones no es sencilla:

F satisface la siguientes propiedades que permiten construir una ε-cadena para cada punto a través de $Fix(F)$:

(a) $F(0, y) = (0, \sqrt{y})$ y $F(1, y) = (1, y)$,

(b) $Per(F) = Fix(F) = \{(x, 0)\}_{x \in I} \cup \{(x, 1)\}_{x \in I} \cup \{(1, y)\}_{y \in I}$,

(c) Si $z = (x, y) \in I^2$ con $x < 1$, $y > 0$, entonces $\omega_F(z) = (x, 1)$ y por tanto $\omega_F(z)$ es un ciclo.

Nota . La dinámica de ámbas aplicaciones no es sencilla:

1. En el primer caso $h(f)$ es al menos $\frac{1}{2}\log(2) > 0$.

Capítulo 1.
Capítulo 2.
Capítulo 3.
Capítulo 4.
Página www
Primera página
Página 24 de 59
Volver
Pantalla completa
Cerrar
Salir

F satisface la siguientes propiedades que permiten construir una ε-cadena para cada punto a través de $Fix(F)$:

(a) $F(0,y) = (0, \sqrt{y})$ y $F(1,y) = (1,y)$,

(b) $Per(F) = Fix(F) = \{(x,0)\}_{x\in I} \cup \{(x,1)\}_{x\in I} \cup \{(1,y)\}_{y\in I}$,

(c) Si $z = (x,y) \in I^2$ con $x < 1$, $y > 0$, entonces $\omega_F(z) = (x,1)$ y por tanto $\omega_F(z)$ es un ciclo.

Nota . La dinámica de ámbas aplicaciones no es sencilla:

1. En el primer caso $h(f)$ es al menos $\frac{1}{2}\log(2) > 0$.
2. En el segundo caso $Per(F) \neq I^2 = CR(F)$ cosa que ocurre en las aplicaciones de dinámica sencilla cuando $Per(F) = UR(F)$.

   Teorema 2.6.5. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular tal que para cada $z \in I^2$, $\omega_F(z)$ es un ciclo. Entonces $Per(F) = UR(F)$.*

3. Diferencias entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

3. Diferencias entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

3.1 El teorema de Birkhoff.

3. Diferencias entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

3.1 El teorema de Birkhoff.

Comenzaremos estableciendo la noción de *fondo del centro* de un S.D.D.

3. Diferencias entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

3.1 El teorema de Birkhoff.

Comenzaremos estableciendo la noción de *fondo del centro* de un S.D.D.

Definición 3.2.1. *Sea (X, ϕ) un sistema dinámico sobre (X, d) un espacio métrico compacto. Sea X_1 el conjunto de todos los puntos no-errantes de ϕ. Consideremos para cada $\alpha \geq 1$, ordinal, el conjunto $X_{\alpha+1} = \Omega(\phi|_{X_\alpha})$. Si α es un límite de números ordinales, sea*

$$X_\alpha = \bigcap_{\alpha > \beta} X_\beta.$$

Debido a que para cada α el conjunto X_α es compacto, en virtud del teorema de Baire-Hausdorff existe un r_α tal que $X_{r_\alpha} = X_{r_{\alpha+1}} = \ldots$. Se define el centro del sistema dinámico (X, ϕ) como el conjunto $C(\phi) = X_{r_\alpha}$. El número r_α recibe el nombre de fondo del centro.

Teorema 3.2.8.(Birkhoff) *Sea* $f : I \to I$ *una función continua. Se satisface la siguiente igualdad,*

$$C(f) = \overline{Per(f)},$$

junto con la afirmación de que el fondo del centro es a lo sumo 2.

Teorema 3.2.8.(Birkhoff) *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Se satisface la siguiente igualdad,*

$$C(f) = \overline{Per(f)},$$

junto con la afirmación de que el fondo del centro es a lo sumo 2.

El teorema de Birkhoff, en general, es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 3.2.8.(Birkhoff) *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Se satisface la siguiente igualdad,*

$$C(f) = \overline{Per(f)},$$

junto con la afirmación de que el fondo del centro es a lo sumo 2.

El teorema de Birkhoff, en general, es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 3.2.9. *En la clase de las apliaciones triangulares de I^2 se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Existe $F : I^2 \rightarrow I^2$ con $C(F) \neq \overline{Per(F)}$.*

(ii) *Para todo k entero positivo existe $F : I^2 \rightarrow I^2$ con el fondo del centro más grande que k.*

(iii) *Existe $F : I^2 \rightarrow I^2$ tal que su w-límite, $\omega(F)$, no es cerrado y además $C(F)$ no está contenido en $\omega(F)$.*

¿Qué CONDICIONES hemos de exigir a la clase $Tr(I^2, I^2)$ para que se satisfaga el teorema de Birkhoff?

¿Qué CONDICIONES hemos de exigir a la clase $Tr(I^2, I^2)$ para que se satisfaga el teorema de Birkhoff?

Teorema 3.2.10.(Birkhoff en $Tr(I^2, I^2)$) *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f de tipo $< 2^\infty$. Entonces F satisface el teorema de Birkhoff.*

¿Qué CONDICIONES hemos de exigir a la clase $Tr(I^2, I^2)$ para que se satisfaga el teorema de Birkhoff?

Teorema 3.2.10.(Birkhoff en $Tr(I^2, I^2)$) *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f de tipo $< 2^\infty$. Entonces F satisface el teorema de Birkhoff.*

Nota . Si $F \in Tr(I^2, I^2)$ con función base f tal que

1. f es de tipo 2^∞,
2. $Per(f)$ es cerrado

entonces, F satisface el teorema de Birkhoff.

3.2 Propiedades relativas a ω-límites.

3.2 Propiedades relativas a ω-límites.

En cuanto a la estructura de los conjuntos ω-límite existen GRANDES DIFERENCIAS entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

3.2 Propiedades relativas a ω-límites.

En cuanto a la estructura de los conjuntos ω-límite existen GRANDES DIFERENCIAS entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

Teorema 3.3.3. *Sea $f : I \to I$ una función continua de clase $< 2^\infty$. Entonces, los conjuntos ω-límite de todos sus puntos son ciclos y como consecuencia finitos.*

3.2 Propiedades relativas a ω-límites.

En cuanto a la estructura de los conjuntos ω-límite existen GRANDES DIFERENCIAS entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

Teorema 3.3.3. *Sea $f : I \to I$ una función continua de clase $< 2^\infty$. Entonces, los conjuntos ω-límite de todos sus puntos son ciclos y como consecuencia finitos.*

En el año 1992, S.F. Kolyada construyó $F \in Tr(I^2, I^2)$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

3.2 Propiedades relativas a ω-límites.

En cuanto a la estructura de los conjuntos ω-límite existen GRANDES DIFERENCIAS entre $Tr(I^2, I^2)$ y $C(I, I)$.

Teorema 3.3.3. *Sea $f : I \to I$ una función continua de clase $< 2^\infty$. Entonces, los conjuntos ω-límite de todos sus puntos son ciclos y como consecuencia finitos.*

En el año 1992, S.F. Kolyada construyó $F \in Tr(I^2, I^2)$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. $\omega_F(1,1) = I_0 = \{0\} \times I$,
2. $Per(F) = Fix(F) = I_0 \Rightarrow F < 2^\infty$,
3. $h(F) = 0$.

Ejemplo 3.3.4. Para $i \in \{1, 2, ...\}$ consideremos $\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}$ $\delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}$. y las siguientes tres zonas de I^2:

Ejemplo 3.3.4. Para $i \in \{1, 2, ...\}$ consideremos $\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}$ $\delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}$. y las siguientes tres zonas de I^2:

(a) Zona (*) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}] \times I$,

(b) Zona (**) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i) \times I$,

(c) Zona (***) $\equiv [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i) \times I$.

Ejemplo 3.3.4. Para $i \in \{1, 2, ...\}$ consideremos $\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}$ $\delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}$. y las siguientes tres zonas de I^2:

(a) Zona (*) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}] \times I$,

(b) Zona (**) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i) \times I$,

(c) Zona (***) $\equiv [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i) \times I$.

Definimos una aplicación triangular de I^2 en la forma:

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde:

(A) $f : I \longrightarrow I$

(A) $f : I \longrightarrow I$

$$f(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_i & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}],\ i = 1, 2, \ldots \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + (\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i],\ i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(A) $f : I \longrightarrow I$

$$f(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_i & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}], \, i = 1, 2, \ldots \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + (\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i], \, i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(B) $g : I^2 \longrightarrow I$

(A) $f : I \longrightarrow I$

$$f(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_i & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}],\ i = 1, 2, \ldots \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + (\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i],\ i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(B) $g : I^2 \longrightarrow I$

(b$_1$) - Sea i impar.

- Si $(x, y) \in$ Zona (*) para i, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \delta_i & \text{si } y \in [\delta_i, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, \delta_i]. \end{cases}$$

- Si $(x, y) \in$ Zona (**) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y - \frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M,1], \\ 0 & \text{si } y \in [0,M]. \end{cases}$$

donde $M = \frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1}$.

- Si $(x, y) \in$ Zona (**) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y - \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

donde $M = \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1}$.

- Si $(x, y) \in$ Zona (***) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y - \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

donde $M = 1 + \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1}$.

(b$_2$) - Sea i par.

- Si $(x, y) \in$ Zona (*) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y + \delta_i & \text{si } y \in [0, 1-\delta_i], \\ 1 & \text{si } y \in [1-\delta_i, 1]. \end{cases}$$

(b$_2$) - Sea i par.

- Si $(x,y) \in$ Zona (*) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y + \delta_i & \text{si } y \in [0, 1-\delta_i], \\ 1 & \text{si } y \in [1-\delta_i, 1]. \end{cases}$$

- Si $(x,y) \in$ Zona (**) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y + \frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

donde $M = 1 - \frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1}$.

- Si $(x, y) \in$ Zona (***) para i, entonces

$$g(x,y) = \begin{cases} y + \frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

donde $M = -\frac{\delta_i+\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1}$.

Observación 1. El comportamiento dinámico de las iteradas de un punto $(a, b) \in I^2 \backslash I_0$ en Zona (*) ∪ Zona (**) ∪ Zona (***) para $i \in \{1, 2...\}$ es el siguiente:

(a) En Zona (*) para i hay un decrecimiento fijo entre las iteradas de valor δ_i si i es impar y respectivamente un crecimiento fijo si i es par.

(b) En Zona (**) para i hay una disminución gradual del decrecimiento entre las iteradas de δ_i a 0 si i es impar y respectivamente un aumento gradual si i es par.

(c) En Zona (***) para i hay un aumento gradual del crecimiento entre las iteradas de 0 a δ_{i+1} si i es impar y respectivamente una disminución gradual si i es par.

Descripción de $\mathcal{W}$ para un elemento de $Tr(I^2, I^2)$.

Descripción de $\mathcal{W}$ para un elemento de $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 3.3.11.(Bal-Gar) *La aplicación triangular de I^2, F, introducida en el Ejemplo 3.3.4, satisface la siguiente propiedad:*

$$\omega_F(a, b) = I_0$$

para todo $(a, b) \in I^2 \backslash I_0$, donde $I_0 = Fix(F)$.

Descripción de $\mathcal{W}$ para un elemento de $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 3.3.11.(Bal-Gar) *La aplicación triangular de I^2, F, introducida en el Ejemplo 3.3.4, satisface la siguiente propiedad:*

$$\omega_F(a, b) = I_0$$

para todo $(a, b) \in I^2 \backslash I_0$, donde $I_0 = Fix(F)$.

Corolario 3.3.11.1. *Para la aplicación triangular de I^2, F, introducida en el Ejemplo 3.3.4, describimos exactamente la familia $\mathcal{W}(F)$:*

$$\mathcal{W}(F) = I_0 \cup \{(0, c)\}_{c \in I}.$$

Descripción de $\mathcal{W}$ para un elemento de $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 3.3.11.(Bal-Gar) *La aplicación triangular de I^2, F, introducida en el Ejemplo 3.3.4, satisface la siguiente propiedad:*

$$\omega_F(a,b) = I_0$$

para todo $(a,b) \in I^2 \backslash I_0$, donde $I_0 = Fix(F)$.

Corolario 3.3.11.1. *Para la aplicación triangular de I^2, F, introducida en el Ejemplo 3.3.4, describimos exactamente la familia $\mathcal{W}(F)$:*

$$\mathcal{W}(F) = I_0 \cup \{(0,c)\}_{c \in I}.$$

Observación 2. Finalmente, no es difícil notar que, con la anterior propiedad, podemos construir aplicaciones triangulares del cubo n-dimensional I^n, usando la aplicación identidad en $(n-2)$-coordenadas, tales que los conjuntos ω-límite de todos sus puntos, excepto los de una cara del hipercubo, son infinitos y constituidos por puntos fijos.

Construcción de un elemento “ *universal* ” en $Tr(I^2, I^2)$

Construcción de un elemento " *universal* " en $Tr(I^2, I^2)$

Tras el trabajo de S.F. Kolyada y L. $\check{S}$noha en [Real Anal. Exch. **18(1)**], donde caracterizaron los posibles conjuntos ω-límite para $Tr(I^2, I^2)$ en una fibra I_a, la cuestión que queda abierta es, dado uno de tales conjuntos, construir analíticamente elementos de $Tr(I^2, I^2)$ que lo posean como conjunto ω-límite.

Construcción de un elemento “ *universal* ” en $Tr(I^2, I^2)$

Tras el trabajo de S.F. Kolyada y L. $\check{S}$noha en [Real Anal. Exch. **18(1)**], donde caracterizaron los posibles conjuntos ω-límite para $Tr(I^2, I^2)$ en una fibra I_a, la cuestión que queda abierta es, dado uno de tales conjuntos, construir analíticamente elementos de $Tr(I^2, I^2)$ que lo posean como conjunto ω-límite.

Centrando el problema, por ejemplo, en la fibra I_0 y teniendo en cuenta la licitud como posibles ω-límites de conjuntos de la forma $\{0\} \times J$, donde $J \subseteq I$ es un intervalo compacto, podríamos plantearnos la construcción de una aplicación triangular de I^2, $F_{[a,b]}$, tal que exista un punto (p, q) verificando $\omega_{F_{[a,b]}}(p, q) = \{0\} \times [a, b]$.

Teorema 3.3.15.(Bal-Gar) *Existe una aplicación triangular F de I^2 satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $[a,b] \subseteq I$, $a \leq b$, existe un punto $(p,q) \in I^2 \backslash I_0$ tal que

$$\omega_F(p,q) = \{0\} \times [a,b].$$

(ii) Sea $(p,q) \in I^2$. Existe un intervalo compacto (degenerado o no) $J \subseteq I$ tal que

$$\omega_F(p,q) = \{0\} \times J.$$

Teorema 3.3.15.(Bal-Gar) *Existe una aplicación triangular F de I^2 satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $[a,b] \subseteq I$, $a \leq b$, existe un punto $(p,q) \in I^2 \backslash I_0$ tal que

$$\omega_F(p,q) = \{0\} \times [a,b].$$

(ii) Sea $(p,q) \in I^2$. Existe un intervalo compacto (degenerado o no) $J \subseteq I$ tal que

$$\omega_F(p,q) = \{0\} \times J.$$

Corolario 3.3.15.1. *Para la aplicación triangular de I^2, F, construida en el Teorema 3.3.15 describimos exactamente la familia $\mathcal{W}(F)$:*

$$\mathcal{W}(F) = \{\{0\} \times J : J \subseteq I \text{ intervalo compacto degenerado o no}\}.$$

Problemas abiertos sobre ω-límites en $Tr(I^2, I^2)$.

Problemas abiertos sobre ω-límites en $Tr(I^2, I^2)$.

PROBLEMA 1.

Problemas abiertos sobre ω-límites en $Tr(I^2, I^2)$.

PROBLEMA 1.

Los intervalos compactos en una fibra son sólo un caso particular de posibles ω-límites para aplicaciones triangulares de I^2. En realidad, si en una fibra I_a consideramos un subconjunto M cerrado y no vacío, M será ω-límite de un elemento de $Tr(I^2, I^2)$, si y sólo si, M no es de la forma

$$\{a\} \times ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n] \cup C)$$

donde todos los subintervalos son no degenerados y con intersección vacía dos a dos, $C \neq \emptyset$ es un conjunto numerable verificando para algún $i \in \{1, ..., n\}$ que $d(C, [a_i, b_i]) > 0$.

Problemas abiertos sobre ω-límites en $Tr(I^2, I^2)$.

PROBLEMA 1.

Los intervalos compactos en una fibra son sólo un caso particular de posibles ω-límites para aplicaciones triangulares de I^2. En realidad, si en una fibra I_a consideramos un subconjunto M cerrado y no vacío, M será ω-límite de un elemento de $Tr(I^2, I^2)$, si y sólo si, M no es de la forma

$$\{a\} \times ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n] \cup C)$$

donde todos los subintervalos son no degenerados y con intersección vacía dos a dos, $C \neq \emptyset$ es un conjunto numerable verificando para algún $i \in \{1, ..., n\}$ que $d(C, [a_i, b_i]) > 0$.

El problema que se plantea es la construcción analítica en $Tr(I^2, I^2)$ de elementos que posean en una fibra concreta, por ejemplo I_0, como ω-límites a los conjuntos permitidos.

PROBLEMA 2.

PROBLEMA 2.

Encontrar una aplicación triangular en I^3 con entropía topológica cero, tal que *todos* sus puntos excepto los de una de sus caras (que resulten fijos para la aplicación) posean como conjunto ω-límite a dicha cara de puntos fijos.

PROBLEMA 3.

PROBLEMA 3.

En el año 1996 A. Blokh, A.M. Bruckner, P.D. Hume y J. Smítal en [Trans AMS, **348**] demostraron que la familia

$$\mathcal{W}(f) = \{\omega_f(x) : x \in I\}$$

donde f es un elemento de $C(I, I)$ era compacta en la métrica de Hausdorff de todos los subconjuntos cerrados del intervalo I. Proponemos como problema:

PROBLEMA 3.

En el año 1996 A. Blokh, A.M. Bruckner, P.D. Hume y J. Smítal en [Trans AMS, **348**] demostraron que la familia

$$\mathcal{W}(f) = \{\omega_f(x) : x \in I\}$$

donde f es un elemento de $C(I, I)$ era compacta en la métrica de Hausdorff de todos los subconjuntos cerrados del intervalo I. Proponemos como problema:

Estudiar la compacidad de $\mathcal{W}(F) = \{\omega_F(p, q) : (p, q) \in I^2\}$ en la métrica de Hausdorff de I^2 como subfamilia de todos los subconjuntos cerrados del cuadrado siendo F un elemento del espacio $Tr(I^2, I^2)$.

PROBLEMA 4.

PROBLEMA 4.

En el año 1999 C. La Paz en [Tesis Doctoral] consiguió encontrar una caracterización en $C(I,I)$ en el siguiente sentido:

PROBLEMA 4.

En el año 1999 C. La Paz en [Tesis Doctoral] consiguió encontrar una caracterización en $C(I, I)$ en el siguiente sentido:

Dada f una función continua del intervalo y $M \subset I$ un posible conjunto ω-límite para la clase $C(I, I)$, dio una condición para saber cuándo M es ω-límite de f, es decir, caracterizó la existencia de $x \in I$ tal que $\omega_f(x) = M$.

Siguiendo esta misma línea, proponemos:

PROBLEMA 4.

En el año 1999 C. La Paz en [Tesis Doctoral] consiguió encontrar una caracterización en $C(I, I)$ en el siguiente sentido:

Dada f una función continua del intervalo y $M \subset I$ un posible conjunto ω-límite para la clase $C(I, I)$, dio una condición para saber cuándo M es ω-límite de f, es decir, caracterizó la existencia de $x \in I$ tal que $\omega_f(x) = M$.

Siguiendo esta misma línea, proponemos:

Dada $F \in Tr(I^2, I^2)$ y $M \subset I_a$ un posible conjunto ω-límite en la fibra I_a, caracterizar cuándo M es ω-límite de F, es decir, dar condiciones para saber cuando existe $(p, q) \in I^2$ tal que $\omega_F(p, q) = M$.

3.3 Contraejemplo a una consecuencia del T.V.I. en $Tr(I^2, I^2)$

3.3 Contraejemplo a una consecuencia del T.V.I. en $Tr(I^2, I^2)$

Para una función continua del intervalo, $f : I \rightarrow I$, una consecuencia inmediata del T.V.I. es la siguiente.

3.3 Contraejemplo a una consecuencia del T.V.I. en $Tr(I^2, I^2)$

Para una función continua del intervalo, $f : I \longrightarrow I$, una consecuencia inmediata del T.V.I. es la siguiente.

Teorema 3.4.1. *Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Si $J \subsetneq I$ es un subintervalo compacto tal que $J \subset f(J)$, entonces existe $p \in J$ punto fijo de f.*

3.3 Contraejemplo a una consecuencia del T.V.I. en $Tr(I^2, I^2)$

Para una función continua del intervalo, $f : I \to I$, una consecuencia inmediata del T.V.I. es la siguiente.

Teorema 3.4.1. *Sea $f : I \to I$ continua. Si $J \subsetneq I$ es un subintervalo compacto tal que $J \subset f(J)$, entonces existe $p \in J$ punto fijo de f.*

En el año 1999, Kolyada, $\check{S}$noha y Misiurewicz en [Fund. Math. **160**] se exponía la posibilidad de encontrar un elemento $F \in Tr(I^2, I^2)$ para el cual exista $J^2 \subsetneq I^2$ verificando que $J^2 \subset F(J^2)$ y J^2 no contiene ningún punto fijo de F.

3.3 Contraejemplo a una consecuencia del T.V.I. en $Tr(I^2, I^2)$

Para una función continua del intervalo, $f : I \longrightarrow I$, una consecuencia inmediata del T.V.I. es la siguiente.

Teorema 3.4.1. *Sea $f : I \to I$ continua. Si $J \subsetneqq I$ es un subintervalo compacto tal que $J \subset f(J)$, entonces existe $p \in J$ punto fijo de f.*

En el año 1999, Kolyada, $\check{S}$noha y Misiurewicz en [Fund. Math. **160**] se exponía la posibilidad de encontrar un elemento $F \in Tr(I^2, I^2)$ para el cual exista $J^2 \subsetneqq I^2$ verificando que $J^2 \subset F(J^2)$ y J^2 no contiene ningún punto fijo de F.

Para ello argumentaban que es suficiente encontrar $F \in Tr(I^2, I^2)$ tal que $J^2 = A \cup B \cup C$, $F(A) \cup F(B) = I^2$ con $F(A) \nsubseteq A$ y $F(B) \nsubseteq B$, $F(C) = I_{\frac{1}{2}}$ y $F(I_{\frac{1}{2}}) = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$. Gráficamente:

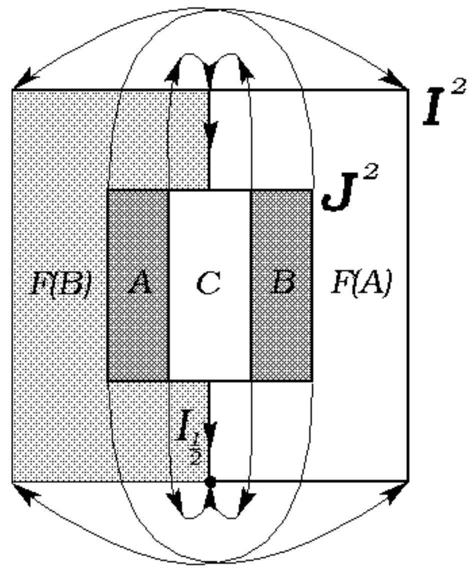

Figure 2: Ejemplo de Kolyada, Šnoha y Misiurewicz

Contraejemplo 3.4.2.(Bal-Gar) Definimos la siguiente aplicación triangular de I^2:

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde

Contraejemplo 3.4.2.(Bal-Gar) Definimos la siguiente aplicación triangular de I^2:

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde

(A) $f : I \to I$

Contraejemplo 3.4.2.(Bal-Gar) Definimos la siguiente aplicación triangular de I^2:

$$F(x,y) = (f(x), g(x,y))$$

donde

(A) $f : I \to I$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{9}{2}x + \frac{5}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{9}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}], \\ -\frac{9}{2}x + 3 & \text{si } x \in [\frac{5}{9}, \frac{2}{3}], \\ x - \frac{2}{3} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Contraejemplo 3.4.2.(Bal-Gar) Definimos la siguiente aplicación triangular de I^2:

$$F(x,y) = (f(x), g(x,y))$$

donde

(A) $f : I \to I$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{3} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{9}{2}x + \frac{5}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{9}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}], \\ -\frac{9}{2}x + 3 & \text{si } x \in [\frac{5}{9}, \frac{2}{3}], \\ x - \frac{2}{3} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

(B) $g : I^2 \to I$

- Si $x \in [0, \frac{4}{9}] \cup x \in [\frac{5}{9}, 1]$,

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, \frac{1}{3}], \\ -3y+2 & \text{si } y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 0 & \text{si } y \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

- Si $x \in [\frac{4}{9}, \frac{1}{2}]$,

$$g(x,y) = \begin{cases} -18(x-\frac{1}{2}) & \text{si } y \in [0, \frac{1}{3}], \\ 18(3y-29)(x-\frac{1}{2}) & \text{si } y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 0 & \text{si } y \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

- Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{9}]$,

$$g(x,y) = \begin{cases} 18(x-\frac{1}{2}) & \text{si } y \in [0, \frac{1}{3}], \\ -18(3y-29)(x-\frac{1}{2}) & \text{si } y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 0 & \text{si } y \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Teorema 3.4.3.(Bal-Gar) *Sean* $J^2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^2$ $A = [\frac{1}{3}, \frac{4}{9}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $B = [\frac{5}{9}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *y* $C = [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. *Entonces, la aplicación triangular* F *introducida en el Contraejemplo 3.4.2 satisface las siguientes condiciones:*

(i) $J^2 = A \cup B \cup C$,

(ii) $F(C) = I_{\frac{1}{2}}$,

(iii) $F(I_{\frac{1}{2}}) = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$,

(iv) $F(A) \cup F(B) = I^2$ *con* $F(A) \nsubseteq A$ *y* $F(B) \nsubseteq B$,

de donde se se sigue que F *no posee ningún punto fijo en* J^2.

3.4 Recurrencia y recurrencia uniforme

3.4 Recurrencia y recurrencia uniforme

En $C(I, I)$ se satisface:

3.4 Recurrencia y recurrencia uniforme

En $C(I, I)$ se satisface:

Teorema 3.5.1.(Misiurewicz) *Sea* $f : I \to I$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es de tipo* $\leq 2^{\infty}$,

(ii) $h(f) = 0$,

(iii) $Rec(f) = UR(f)$.

3.4 Recurrencia y recurrencia uniforme

En $C(I,I)$ se satisface:

Teorema 3.5.1.(Misiurewicz) *Sea $f : I \to I$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es de tipo* $\leq 2^\infty$,

(ii) $h(f) = 0$,

(iii) $Rec(f) = UR(f)$.

El Teorema 3.5.1 relaciona:

PROPIEDADES DINÁMICAS $\Leftrightarrow$ PROPIEDADES TOPOLÓGICAS

El Teorema de Misiurewicz es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

El Teorema de Misiurewicz es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

En el año 1995 Balibrea, Linero y Esquembre en [Int. J. Bif. and Chaos, **5**] probaron el sigiente resultado:

El Teorema de Misiurewicz es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

En el año 1995 Balibrea, Linero y Esquembre en [Int. J. Bif. and Chaos, **5**] probaron el sigiente resultado:

Teorema 3.5.2. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $F : I^2 \to I^2$ aplicación triangular satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(i) *F es de tipo 2^∞,*

(ii) $h(F) > 0$,

(iii) $UR(F) \subsetneq Rec(F)$.

(iv) *F es de clase C^k.*

El Teorema de Misiurewicz es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$.

En el año 1995 Balibrea, Linero y Esquembre en [Int. J. Bif. and Chaos, **5**] probaron el sigiente resultado:

Teorema 3.5.2. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $F : I^2 \to I^2$ *aplicación triangular satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(i) F *es de tipo* 2^∞,

(ii) $h(F) > 0$,

(iii) $UR(F) \subsetneq Rec(F)$.

(iv) F *es de clase* C^k.

¿Qué CONDICIONES hemos de exigir a la clase $Tr(I^2, I^2)$ para que se satisfaga el teorema de Misiurewicz?

Teorema 3.5.12.1.(Misiurewicz en $Tr(I^2, I^2)$) *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f, tal que $Per(f)$ cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) F *es de clase* $\leq 2^\infty$,

(ii) $h(F) = 0$,

(iii) $Rec(F) = UR(F)$.

Teorema 3.5.12.1.(Misiurewicz en $Tr(I^2, I^2)$) *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f, tal que $Per(f)$ cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) *F es de clase $\leq 2^\infty$,*

(ii) $h(F) = 0$,

(iii) $Rec(F) = UR(F)$.

3.5 Puntos homoclínicos.

Teorema 3.5.12.1.(Misiurewicz en $Tr(I^2, I^2)$) *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular con función base f, tal que $Per(f)$ cerrado. Entonces son equivalentes:*

(i) F *es de clase* $\leq 2^\infty$,

(ii) $h(F) = 0$,

(iii) $Rec(F) = UR(F)$.

3.5 Puntos homoclínicos.

Definición 3.6.1. *Sea $\phi : X \to X$ una aplicación continua. Se dice que $x \in X$ es un punto homoclínico para ϕ, si la aplicación posee un punto periódico p verificando las siguientes condiciones:*

(i) $x \neq p$,

(ii) *para cada entorno* U *de* p *existe* k, *entero positivo, tal que,* $x \in f^{r \cdot k}(U)$ *donde* r *es el período del punto* p,

(iii) $f^{r \cdot l}(x) = p$ *para algún entero positivo* l.

Llamaremos trayectoria homoclínica a la órbita de cualquier punto homoclínico.

(i) $x \neq p$,

(ii) *para cada entorno* U *de* p *existe* k, *entero positivo, tal que,* $x \in f^{r \cdot k}(U)$ *donde* r *es el período del punto* p,

(iii) $f^{r \cdot l}(x) = p$ *para algún entero positivo* l.

Llamaremos *trayectoria homoclínica* *a la órbita de cualquier punto homoclínico.*

Corolario 3.6.9.1. *Sea* $f : I \to I$ *continua. Entonces son equivalentes:*

(i) f *posee entropía topológica positiva,*

(ii) f *posee un punto homoclínico.*

(i) $x \neq p$,

(ii) *para cada entorno* U *de* p *existe* k, *entero positivo, tal que,* $x \in f^{r \cdot k}(U)$ *donde* r *es el período del punto* p,

(iii) $f^{r \cdot l}(x) = p$ *para algún entero positivo* l.

Llamaremos trayectoria homoclínica a la órbita de cualquier punto homoclínico.

Corolario 3.6.9.1. *Sea* $f : I \to I$ *continua. Entonces son equivalentes:*

(i) f *posee entropía topológica positiva,*

(ii) f *posee un punto homoclínico.*

El Corolario 3.6.9.1 es FALSO en $Tr(I^2, I^2)$. (Como contraejemplo véase la aplicación constriuda en el Teorema 3.5.2.)

Para todas las clases de puntos descritos en la E.P.E. era cierto el Teorema de la Proyección de Kolyada, en cambio para puntos homoclínicos tenemos el siguiente resultado:

Para todas las clases de puntos descritos en la E.P.E. era cierto el Teorema de la Proyección de Kolyada, en cambio para puntos homoclínicos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.6.11. *Existe $F : I^2 \to I^2$ una aplicación triangular tal que $\Gamma(f)$ no está incluido en $Pr(\Gamma(F))$, donde $\Gamma(-)$ denota el conjunto de los puntos homoclínicos.*

4. Conjuntos minimales en $Tr(I^2, I^2)$ y $Atr(I^2, I^2)$

Definición 4.2.1. *Sea X un espacio topológico y $\Phi : X \to X$ una aplicación continua. Diremos que un subconjunto $M \subseteq X$ es minimal para Φ si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $M \neq \emptyset$,

(ii) M *es cerrado,*

(iii) M *es Φ-invariante, es decir,* $\Phi(M) \subseteq M$,

(iv) M *no contiene ningún subconjunto propio satisfaciendo* (i), (ii) *y* (iii).

4. Conjuntos minimales en $Tr(I^2, I^2)$ y $Atr(I^2, I^2)$

Definición 4.2.1. *Sea X un espacio topológico y $\Phi : X \to X$ una aplicación continua. Diremos que un subconjunto $M \subseteq X$ es minimal para Φ si satisface las siguientes propiedades:*

(i) $M \neq \emptyset$,

(ii) *M es cerrado,*

(iii) *M es Φ-invariante, es decir, $\Phi(M) \subseteq M$,*

(iv) *M no contiene ningún subconjunto propio satisfaciendo (i), (ii) y (iii).*

Determinar los conjuntos minimales es importante pues en ellos se da CIERTA REGULARIDAD

4.1 Minimalidad en $C(I,I)$.

4.1 Minimalidad en $C(I, I)$.

Un conjunto J será minimal en $C(I, I)$ si $J \subseteq I$ y existe $f \in C(I, I)$ tal que J es minimal para f. Para caracterizar completamente los conjuntos minimales del intervalo estudiamos el problema desde dos puntos vista.

4.1 Minimalidad en $C(I, I)$.

Un conjunto J será minimal en $C(I, I)$ si $J \subseteq I$ y existe $f \in C(I, I)$ tal que J es minimal para f. Para caracterizar completamente los conjuntos minimales del intervalo estudiamos el problema desde dos puntos vista.

1. El problema directo.

4.1 Minimalidad en $C(I, I)$.

Un conjunto J será minimal en $C(I, I)$ si $J \subseteq I$ y existe $f \in C(I, I)$ tal que J es minimal para f. Para caracterizar completamente los conjuntos minimales del intervalo estudiamos el problema desde dos puntos vista.

1. El problema directo.

¿Qué tipo de subconjuntos de I pueden ser minimales para la clase $C(I, I)$?

4.1 Minimalidad en $C(I,I)$.

Un conjunto J será minimal en $C(I,I)$ si $J \subseteq I$ y existe $f \in C(I,I)$ tal que J es minimal para f. Para caracterizar completamente los conjuntos minimales del intervalo estudiamos el problema desde dos puntos vista.

1. El problema directo.

¿Qué tipo de subconjuntos de I pueden ser minimales para la clase $C(I,I)$?

Las órbitas periódicas son conjuntos minimales.

4.1 Minimalidad en $C(I, I)$.

Un conjunto J será minimal en $C(I, I)$ si $J \subseteq I$ y existe $f \in C(I, I)$ tal que J es minimal para f. Para caracterizar completamente los conjuntos minimales del intervalo estudiamos el problema desde dos puntos vista.

1. El problema directo.

¿Qué tipo de subconjuntos de I pueden ser minimales para la clase $C(I, I)$?

Las órbitas períodicas son conjuntos minimales.

Definición 2.6.3. *Sea $C \subset J$, donde J es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Diremos que C es un conjunto de tipo Cantor en J si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) C *es un subconjunto cerrado de* J*,*

(ii) C *no contiene puntos aislados,*

(iii) C *no contiene ningún intervalo.*

(i) C *es un subconjunto cerrado de* J*,*

(ii) C *no contiene puntos aislados,*

(iii) C *no contiene ningún intervalo.*

Teorema 4.3.2. *Cualquier conjunto tipo Cantor,* $C \subseteq I$*, es minimal en* $C(I, I)$.

(i) C *es un subconjunto cerrado de* J*,*

(ii) C *no contiene puntos aislados,*

(iii) C *no contiene ningún intervalo.*

Teorema 4.3.2. *Cualquier conjunto tipo Cantor,* $C \subseteq I$*, es minimal en* $C(I, I)$.

2. El problema inverso.

(i) *C es un subconjunto cerrado de J,*

(ii) *C no contiene puntos aislados,*

(iii) *C no contiene ningún intervalo.*

Teorema 4.3.2. *Cualquier conjunto tipo Cantor, $C \subseteq I$, es minimal en $C(I, I)$.*

2. El problema inverso.

Dado M conjunto minimal en $C(I, I)$, el problema consiste en intentar describir M.

(i) *C es un subconjunto cerrado de J,*

(ii) *C no contiene puntos aislados,*

(iii) *C no contiene ningún intervalo.*

Teorema 4.3.2. *Cualquier conjunto tipo Cantor, $C \subseteq I$, es minimal en $C(I, I)$.*

2. El problema inverso.

Dado M conjunto minimal en $C(I, I)$, el problema consiste en intentar describir M.

Si M es finito, entonces M es una órbita periódica sin más considerar la función que transforma cada punto del conjunto finito en el siguiente, el último en el primero y para el resto de los puntos se define por continuidad.

Teorema 4.3.4. *Sea $M \subseteq I$ un conjunto minimal infinito para $C(I, I)$. Entonces, M es un conjunto tipo Cantor.*

Teorema 4.3.4. *Sea $M \subseteq I$ un conjunto minimal infinito para $C(I, I)$. Entonces, M es un conjunto tipo Cantor.*

4.2 Minimalidad en $Tr(I^2, I^2)$.

Teorema 4.3.4. *Sea $M \subseteq I$ un conjunto minimal infinito para $C(I,I)$. Entonces, M es un conjunto tipo Cantor.*

4.2 Minimalidad en $Tr(I^2, I^2)$.

En 1995 Forti, Paganoni y Smital en [Bull. Austral. **51**] probaron el siguiente resultado:

Teorema 4.3.4. *Sea $M \subseteq I$ un conjunto minimal infinito para $C(I, I)$. Entonces, M es un conjunto tipo Cantor.*

4.2 Minimalidad en $Tr(I^2, I^2)$.

En 1995 Forti, Paganoni y Smital en [Bull. Austral. **51**] probaron el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *Existen $F_1, F_2 : I^2 \to I^2$ triangulares verificando las siguientes propiedades:*

(i) *F_1 y F_2 tienen entropía topológica cero.*

(ii) *F_1 posee un conjunto minimal M tal que $M \supset \{\alpha\} \times I$, $\alpha \in I$.*

(iii) *F_2 verifica $Rec(F_2) \neq UR(F_2)$.*

Capítulo 1.
Capítulo 2.
Capítulo 3.
Capítulo 4.
Página www
Primera página
Página 55 de 59
Volver
Pantalla completa
Cerrar
Salir

4.3 Minimalidad en $Atr(I^2, I^2)$.

4.3 Minimalidad en $Atr(I^2, I^2)$.

Definición 4.5.1. *Sea X un espacio métrico compacto. Una aplicación continua $F : X^2 \to X^2$ diremos que es una aplicación antitriangular en X, si es de la forma*

$$F(x, y) = (g(y), f(x)),$$

donde f y g son endomorfismos continuos de X.

Al conjunto de todas las aplicaciones antitriangulares de X lo denotaremos por $Atr(X^2, X^2)$.

4.3 Minimalidad en $Atr(I^2, I^2)$.

Definición 4.5.1. *Sea X un espacio métrico compacto. Una aplicación continua $F : X^2 \to X^2$ diremos que es una aplicación antitriangular en X, si es de la forma*

$$F(x, y) = (g(y), f(x)),$$

donde f y g son endomorfismos continuos de X.

Al conjunto de todas las aplicaciones antitriangulares de X lo denotaremos por $Atr(X^2, X^2)$.

Observación 3. Sea $F(x, y) = (g(y), f(x))$ una aplicación antitriangular. Claramente, para cada entero $n \geq 0$ y $(x, y) \in I^2$ se verifica

$$F^{2n}(x, y) = ((g \circ f)^n(x), (f \circ g)^n(y)), \tag{1}$$

$$F^{2n+1}(x, y) = (g \circ (f \circ g)^n(y), f \circ (g \circ f)^n(x)). \tag{2}$$

4.3 Minimalidad en $Atr(I^2, I^2)$.

Definición 4.5.1. *Sea X un espacio métrico compacto. Una aplicación continua $F : X^2 \to X^2$ diremos que es una aplicación antitriangular en X, si es de la forma*

$$F(x, y) = (g(y), f(x)),$$

donde f y g son endomorfismos continuos de X.

Al conjunto de todas las aplicaciones antitriangulares de X lo denotaremos por $Atr(X^2, X^2)$.

Observación 3. Sea $F(x, y) = (g(y), f(x))$ una aplicación antitriangular. Claramente, para cada entero $n \geq 0$ y $(x, y) \in I^2$ se verifica

$$F^{2n}(x, y) = ((g \circ f)^n(x), (f \circ g)^n(y)), \tag{1}$$

$$F^{2n+1}(x, y) = (g \circ (f \circ g)^n(y), f \circ (g \circ f)^n(x)). \tag{2}$$

La dinámica de F está fuertemente conectada con la de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Corolario 4.5.6.1. *Sea* $F : I^2 \to I^2$ *una aplicación antitriangular y* $M \subseteq I^2$ *un conjunto minimal para* F. *Entonces, o* M *es finito, o es un conjunto de tipo Cantor.*

Corolario 4.5.6.1. *Sea* $F : I^2 \to I^2$ *una aplicación antitriangular y* $M \subseteq I^2$ *un conjunto minimal para* F*. Entonces, o* M *es finito, o es un conjunto de tipo Cantor.*

Conjuntos admisibles.

Corolario 4.5.6.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación antitriangular y $M \subseteq I^2$ un conjunto minimal para F. Entonces, o M es finito, o es un conjunto de tipo Cantor.*

Conjuntos admisibles.

Un conjunto $M \subseteq I^2$ se dice *admisible*, si existe $F \in Atr(I^2, I^2)$ tal que M es un conjunto minimal para F.

Corolario 4.5.6.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación antitriangular y $M \subseteq I^2$ un conjunto minimal para F. Entonces, o M es finito, o es un conjunto de tipo Cantor.*

Conjuntos admisibles.

Un conjunto $M \subseteq I^2$ se dice *admisible*, si existe $F \in Atr(I^2, I^2)$ tal que M es un conjunto minimal para F.

El caso finito

Corolario 4.5.6.1. *Sea $F : I^2 \to I^2$ una aplicación antitriangular y $M \subseteq I^2$ un conjunto minimal para F. Entonces, o M es finito, o es un conjunto de tipo Cantor.*

Conjuntos admisibles.

Un conjunto $M \subseteq I^2$ se dice *admisible*, si existe $F \in Atr(I^2, I^2)$ tal que M es un conjunto minimal para F.

El caso finito

1. Dado M un conjunto admisible finito, caracterizamos la distribución de los puntos de M. Esta distribución depende de la cardinalidad de M y de la distribución de los puntos de M en las fibras horizontal y vertical. (Para un punto $(x, y) \in I^2$, las fibras horizontal y vertical asociadas al mismo son respectivamente:

$$\widetilde{I}_y := I \times \{y\},$$

$$I_x = I \times \{y\}.$$

2. Se muestra que cualquier distribución de puntos obtenida en 1 es posible, es decir, se construye $F \in Atr(I^2, I^2)$ poseyendo un conjunto minimal con la cita distrubución de puntos.

2. Se muestra que cualquier distribución de puntos obtenida en 1 es posible, es decir, se construye $F \in Atr(I^2, I^2)$ poseyendo un conjunto minimal con la cita distrubución de puntos.

Corolario 4.5.16.1. *Sean* $P, Q \subset I$ *conjuntos finitos. Entonces el produto* $P \times Q$ *es un conjunto admisible en* $Atr(I^2, I^2)$*, si y sólo si,* $Card(P) = Card(Q) \in \{1, 2\}$.

2. Se muestra que cualquier distribución de puntos obtenida en 1 es posible, es decir, se construye $F \in Atr(I^2, I^2)$ poseyendo un conjunto minimal con la cita distrubución de puntos.

Corolario 4.5.16.1. *Sean $P, Q \subset I$ conjuntos finitos. Entonces el produto $P \times Q$ es un conjunto admisible en $Atr(I^2, I^2)$, si y sólo si, $Card(P) = Card(Q) \in \{1, 2\}$.*

El caso infinito

2. Se muestra que cualquier distribución de puntos obtenida en 1 es posible, es decir, se construye $F \in Atr(I^2, I^2)$ poseyendo un conjunto minimal con la cita distrubución de puntos.

Corolario 4.5.16.1. *Sean* $P, Q \subset I$ *conjuntos finitos. Entonces el produto* $P \times Q$ *es un conjunto admisible en* $Atr(I^2, I^2)$*, si y sólo si,* $Card(P) = Card(Q) \in \{1, 2\}$.

El caso infinito

Para el caso infinito ciertos resultados parciales han sido obtenidos.

2. Se muestra que cualquier distribución de puntos obtenida en 1 es posible, es decir, se construye $F \in Atr(I^2, I^2)$ poseyendo un conjunto minimal con la cita distrubución de puntos.

Corolario 4.5.16.1. *Sean $P, Q \subset I$ conjuntos finitos. Entonces el produto $P \times Q$ es un conjunto admisible en $Atr(I^2, I^2)$, si y sólo si, $Card(P) = Card(Q) \in \{1, 2\}$.*

El caso infinito

Para el caso infinito ciertos resultados parciales han sido obtenidos.

Teorema 4.5.21. *Sean $M_1, M_2 \subset I$ dos conjuntos tipo Cantor. Entonces el conjunto $M_1 \times M_2$ no es admisible en $Atr(I^2, I^2)$.*

ARTÍCULOS OBTENIDOS:

[1] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *Description of ω-limit Sets of a Triangular map on* I^2,Far East Journal of Dynamical Systems, **3(1)**, 87-101, (2001).

[2] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *A Triangular Map on* I^2 *whose ω-limit Sets are all Compact Intervals of* $\{0\} \times I$., Enviado a Discrete and Continuous Dyanmical Systems,(preprint), (2001).

[3] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *The Space of ω-limit Sets of Triangular Mappings*, Enviado a Trans. of A.M.S.,(preprint), (2001).

[4] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *On ω-limit Set of Triangular maps on* I^3.,(preprint), (2001).